

À propos des leçons 2, 3, 4, 5, 6 du séminaire *La Topologie et le Temps*

La mathématique est l'art de donner le même nom à des choses différentes
Henri Poincaré, dans *Science et Méthode*

Bon ... Je voudrais tout d'abord remercier Pierre-Christophe Cathelineau qui, lorsqu'il m'a confié le soin de vous présenter ces leçons m'a précisé qu'il me laissait la liberté de choisir les points qui me semblaient les plus importants, quitte à en laisser d'autres de côté.

Vous allez constater dans ce qui suit que j'ai fait grand usage de cette liberté qu'il me laissait, puisque je vais limiter mon propos un champ, celui qui, à mon sens, est celui qui parcourt le séminaire de bout en bout, et que je vous propose de formuler comme une question :

Que résulte-t-il de la prise en compte de l'homotopie dans l'usage clinique que nous faisons des chaînes – borroméennes ou non – supposées rendre compte de l'articulation des trois registres R, S, I

Contexte

Rappelons que le travail de Lacan se déroulait à l'époque et depuis plusieurs années dans le cadre d'un dialogue très intense avec le jeune mathématicien Pierre Soury. Pierre Soury était intervenu à plusieurs reprises dans le séminaire de Lacan, et sa recherche se développait explicitement en résonance avec les points que soulevait Lacan dans son séminaire.

Pierre Soury s'attachait entre autres à expliciter un article de Milnor (« Link groups »¹) paru en 1954, dont l'objet principal était une tentative de classification des « links » c'est à dire de ce que Pierre Soury appelle des chaînes (le terme mathématique officiel est, je crois, celui d'entrelacs²). Au cours de son travail Milnor avait mis en évidence l'importance des chaînes borroméennes, en tant qu'elles constituaient des structures génératrices permettant d'organiser l'ensemble des chaînes en sous ensembles possédant des caractéristiques en commun.

C'est de ce travail de recherche de Pierre Soury, et de son articulation avec les préoccupations de Lacan que je vais maintenant tenter – non pas de rendre compte – mais de vous donner, disons, le parfum.

Homotopie

Classes d'équivalence

A titre d'introduction je vous rappellerai un exemple simple dont Frege est l'inventeur, et qui permet d'illustrer simplement le pouvoir classificatoire de ce qu'il est d'usage d'appeler une relation d'équivalence :

1 Link Groups
Milnor (John), *The Annals of Mathematics*, Annals of Mathematics, Vol. 59, No. 2, 1954, p. 177-195
<http://www.jstor.org/stable/1969685>

2 Le vocabulaire était à cette époque encore assez fluctuant. Notamment, on appelait « nœud borroméen » ce qui devrait en toute rigueur se nommer « entrelacs borroméen » ou « chaîne borroméenne ». Le terme de « nœud » est en principe réservé aux entrelacs ne comportant qu'une seule corde.

Considérons l'ensemble des droites du plan. Il existe entre ces droites une relation, le parallélisme qui est une relation d'équivalence.

En effet, cette relation est :

- réflexive : D est parallèle à D ;
- symétrique : si D est parallèle à D', alors D' est parallèle à D ;
- transitive : si D est parallèle à D' et D' est parallèle à D'', alors D est parallèle à D''.

L'existence de cette relation permet de regrouper l'ensemble de toutes les droites du plan en « paquets » de droites toutes parallèles entre elles. Ces « paquets » sont appelés les « classes d'équivalence » des droites selon la relation de parallélisme. Ces classes sont ce que, plus simplement, on appelle aussi « directions » du plan. Toute droite possède une direction, qui est la classe d'équivalence à laquelle elle appartient.

Les directions sont le résultat du « quotient abstrait » des droites par la relation de parallélisme. Elles ne sont pas matérialisables directement, mais un angle (compris entre 0 et 360°) permet de définir une direction.

Cet exemple illustre ce fait que chaque fois qu'on définit une relation d'équivalence sur un ensemble on se donne par là même le moyen d'inventer un nouveau concept, ou comme dit Soury « un nouveau genre d'objet. »

C'est ce procédé qu'utilise Milnor pour organiser l'ensemble des chaînes.

Isotopie

Dans la théorie des nœuds (et des entrelacs) ordinaire, on considère comme identiques deux nœuds qui peuvent être déduits l'un de l'autre par des transformations « physiques ». Il n'est pas toujours facile de trouver la suite de transformations « physiques » qui font passer un nœud (ou un entrelacs) donné d'une de ses présentations à une autre. La figure suivante illustre ce fait : le nœud du haut de la figure « est en fait » un nœud trivial (un rond non noué), comme le montre la suite de transformations décrites sur la figure. En d'autres termes, le nœud du haut de la figure et le nœud trivial sont en fait « un même nœud ».

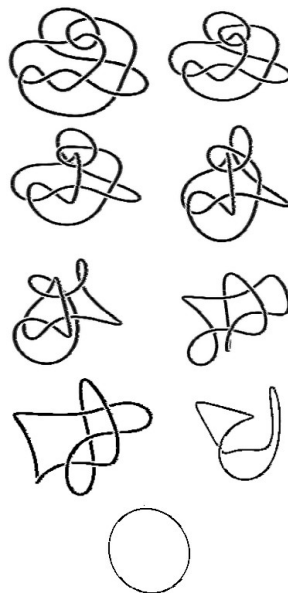


Figure 1 : Une monstration par isotopie d'une trivialité non-évidente

On dit que les noeuds, en théorie classique, sont définis « à une isotopie près ».

On peut dire aussi que dans l'ensemble des présentations de chaînes, l'isotopie est une relation d'équivalence qui définit les chaînes comme des classes d'équivalence. Une chaîne est ce qui est sous-jacent à l'ensemble de ses présentations possibles.

On montre que les transformations autorisées par l'isotopie sur une représentation plane d'un nœud ou d'un entrelacs peuvent être ramenées à 3, les trois transformations de Reidemeister. Nous n'insisterons pas plus sur ces transformations, sinon pour dire qu'elles sont une formalisation de ce qui « se comprend » ... comme on dit, c'est-à-dire ce qui nous permet de dire « c'est le même nœud ».

Homotopie

L'invention – fondamentale – de Milnor est d'introduire dans l'ensemble des chaînes (à 1, 2, ..., n cordes) une nouvelle relation d'équivalence : l'homotopie, qui va permettre de considérer comme équivalents des entrelacs qui, pour le sens commun, ne le sont pas. La règle est la suivante :

en plus des mouvements de Reidemeister, on admet qu'une corde peut s'auto-traverser.

Cela paraît simple mais Pierre Soury juge nécessaire de commenter à plusieurs reprises ce dont il s'agit.

Ainsi dans le texte 35 :

« L'homotopie est une relation d'équivalence sur les chaînes. Par « quotient abstrait » ça définit un nouveau genre d'objet, les « chaînes à l'homotopie près » ou chaînes H.

[...]

Qu'est-ce qui fait tenir une chaîne ? C'est que un morceau de fil fait obstruction à n'importe quel autre morceau de fil ou encore c'est que un morceau de fil ne se laisse pas traverser par n'importe quel autre morceau de fil.

Une traversée, c'est quand un morceau de fil traverse un autre morceau de fil. Une traversée fait passer d'une chaîne à une autre chaîne. Qu'est-ce qui fait tenir une chaîne, c'est que les traversées ne sont pas possibles.

[...]

Une auto-traversée, c'est quand un morceau de fil traverse un autre morceau de fil appartenant au même cercle. Deux chaînes sont homotopes, ou encore sont équivalentes par homotopie, ou encore sont homotopiquement équivalentes s'il est possible d'aller de l'une à l'autre par une succession d'auto-traversées.

Donc : soient deux chaînes, n'importe lesquelles. Elles sont ou ne sont pas homotopes. L'homotopie, ou encore l'équivalence par homotopie est une relation d'équivalence. Si deux chaînes sont homotopes, elles ont le même nombre de cercles.

Une chaîne est homotopiquement neutre si elle se déchaîne par homotopie, ou encore si elle est homotope à une chaîne neutre.

Exemples :

La figure alpha montre deux chaînes qui sont différentes et qui sont homotopes.

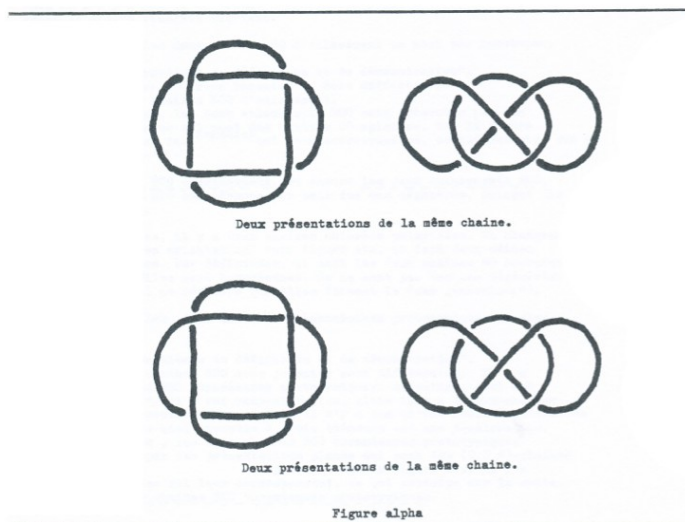


Figure 2 : Figure alpha du texte de Soury. NB Les deux chaînes ne sont PAS homotopiquement neutres.

La figure bêta montre des chaînes qui ne sont pas neutres et qui sont homotopiquement neutres.

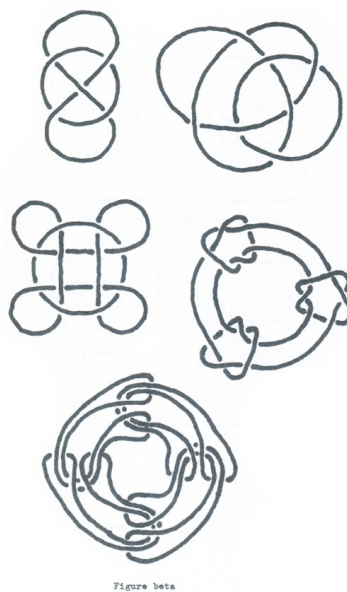


Figure 3 : Figure bêta du texte de Soury : plusieurs chaînes homotopiquement neutres
N.B. La monstration de cette propriété n'est pas évidente dans tous les cas !

[...]

Si une chaîne H est sous-jacente à une chaîne, cette chaîne est sur-jacente à cette chaîne H. Si une chaîne est sur-jacente à une chaîne H, elle est une présentation de cette chaîne H

Une chaîne, ça peut être réalisé matériellement. Il n'y a pas de réalisation matérielle des chaînes H.

Ou alors, il faudrait en trouver une. Ce qui fait que la modalité « chaîne H » reste un façon de parler des chaînes.

Par exemple, les deux chaînes de la figure alpha sont homotopes. Donc, elles ont même chaîne H sous jacente. Elles peuvent être considérées comme deux présentations différentes de la même chaîne H.

Et cette chaîne H, est-il possible de la voir ? Non. Il est possible de la désigner. N'importe laquelle

de ses présentations la désigne. Une chaîne H peut être désignée, mais pas réalisée. »

...Pour reprendre notre exemple du début, les chaînes H sont aux chaînes ce que les directions sont aux droites : le résultat d'un quotient abstrait qui permet de répartir les objets (droites, chaînes) en classes, soit de les classer.

Les conséquences de l'homotopie

Donnons quelques exemples

Premier exemple : les nœuds. Du point de vue de l'homotopie, il suffit d'un peu de réflexion pour se convaincre que TOUS les nœuds (c'est à dire les entrelacs à une seule corde) sont homotopiquement équivalents, et se dénouent par homotopie. Il n'y a donc qu'une chaîne H à une corde, et elle peut être représentée par le nœud trivial (un simple rond).

Deuxième exemple : les nœuds borroméens homotopiquement neutres

Dans son exploration systématique des chaînes et de leurs chaînes H sous-jacentes, Pierre Soury constate, et c'est souligné par Milnor que le nœud borroméen « classique » que Lacan utilise depuis plusieurs années (1972 : ... *Ou Pire*) n'est pas homotopiquement neutre. En d'autres termes, il possède une chaîne H sous-jacente qui ne peut se réduire par homotopie à 3 cercles disjoints. En d'autres termes encore, ce nœud « tient », même lorsqu'on admet l'auto-traversée des registres ... ce qu'on pourrait appeler le réel du nouage est ici pleinement à l'œuvre.

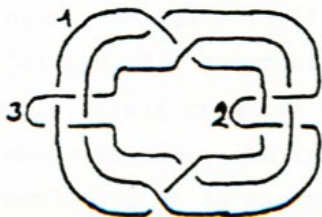
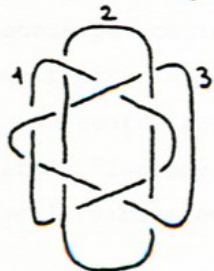
En revanche, et il s'en ouvre à Lacan, il découvre l'existence de chaînes borroméennes différentes du nœud borroméen classique, et qui, elles, se déchaînent – selon le terme de Soury – par homotopie.

Ce qui me semble frappant, c'est que Lacan donne toute son importance à cette découverte : une avancée au niveau de la combinatoire, de la mathématique des chaînes, lui est immédiatement l'occasion de remettre sur le métier même les notions les plus fondamentales de son enseignement.

En effet, il consacre toute la leçon IV du séminaire *La Topologie et le Temps* à tracer plusieurs versions d'une telle chaîne (à la fois borroméenne et homotopiquement neutre), versions qu'on retrouve presque telles quelles dans le texte de Soury, par exemple dans le texte 140 :

chaîne de trois cercles :

Présentations à 12 croisements :



Autres présentations :

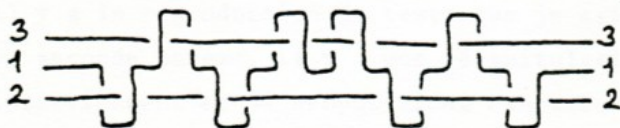
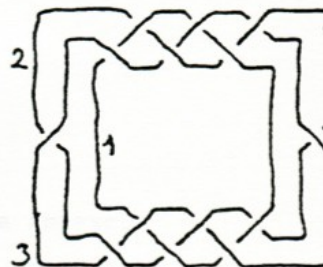
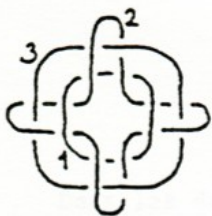
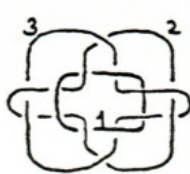
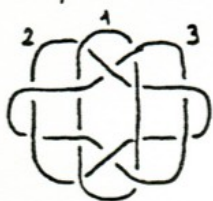


Figure 4 : Figure extraite du texte 140 de Soury

On peut, bien sûr, vérifier sur ces figures plusieurs éléments techniques :

- C'est bien toujours de la même chaîne dont il s'agit (à une isotopie près ! !) ;
- Il s'agit bien d'une chaîne borroméenne ;
- Cette chaîne est homotopiquement neutre : elle peut se transformer, si l'on autorise l'auto-traversée des ronds en une chaîne triviale, c'est à dire en trois ronds disjoints. La figure suivante est une « monstration » de ce fait :

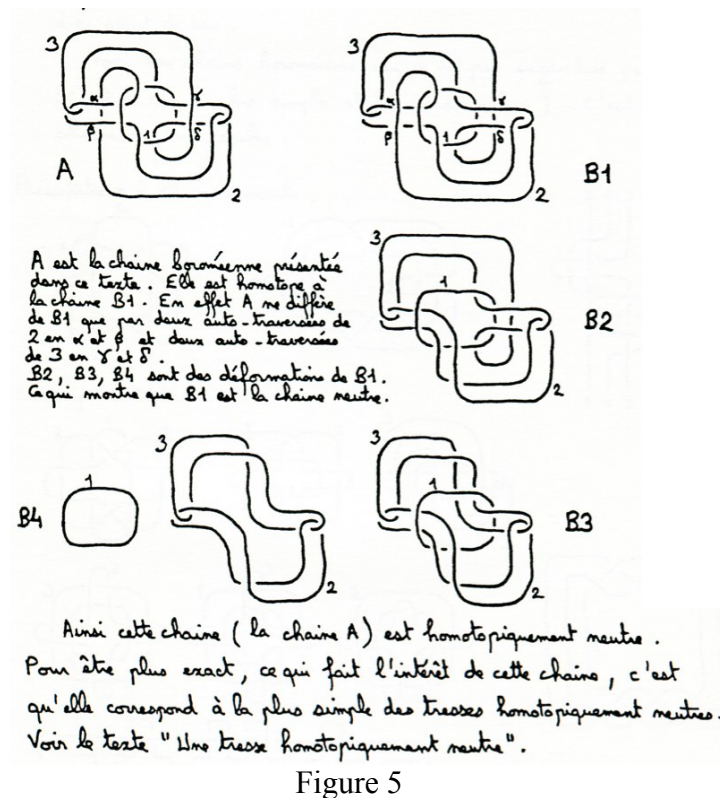


Figure 5

Dans la suite du séminaire, Lacan s'intéressera à une autre présentation du même fait : « il existe des nœuds borroméens homotopiquement neutres », à savoir une chaîne qu'il appelle « le nœud borroméen généralisé ». Je me contente ici de vous donner une de ses présentations :

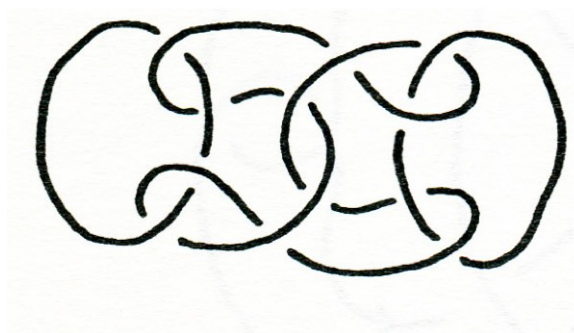


Figure 6 : Le Nœud borroméen généralisé tel que présenté par Lacan

Il s'agit là aussi

- d'une chaîne borroméenne à trois ronds ;
- différente du nœud borroméen classique ;
- homotopiquement neutre.

De cette chaîne, il en sera sans doute encore question dans la suite de ces journées, dans la mesure où elle sert de support à ce qui a déjà été évoqué à plusieurs reprises ici : le « geste de Lacan » (Stéphane Dugowson) qui permet un passage du nœud à 3 ronds au nœud à 4 ronds.

La lecture lacanienne des conséquences de l'homotopie

... Mais ce qui nous paraît fondamental dans ce début du séminaire, est que Lacan introduit à partir de ces nouvelles chaînes proposées par Soury un questionnement radicalement nouveau concernant le sens à donner à l'articulation des trois registres.

Ce fait témoigne encore une fois de « l'optimisme du symbolique » dont faisait preuve Lacan : il attendait RÉELLEMENT que des éclaircissements pour le champ de la psychanalyse découlent des avancées purement combinatoires résultant de la recherche de Pierre Soury³.

Voici les passages qui nous semblent témoigner de ce questionnement renouvelé :

« Il n'y a pas de rapport sexuel, c'est ce que j'ai énoncé. Qu'est-ce qui y supplée, parce que il est clair que les gens, ce qu'on appelle tel, soit les êtres humains, les gens font l'amour. Il y a à ça une explication : la possibilité – notons que le possible, c'est ce que nous avons défini comme ce qui cesse de s'écrire – la possibilité d'un troisième sexe. Pourquoi il y en a deux d'ailleurs, ça s'explique mal. C'est ce qui est évoqué dans la doublure d'Ève, à savoir Lilith. L'évocation n'est pourtant pas une chose précise. **C'est justement la précision, c'est-à-dire de Réel, que j'ai fait état en rêvant en somme à ce qu'il en est du nœud borroméen.**

Le nœud borroméen a comme consistance de s'imaginer. »

... c'est donc d'un rêve qu'il s'agit. Une formation de l'inconscient comme une autre, en somme !

[...] c'est bien pourquoi ce qui est là [...]

Il s'agit du nœud proposé par Soury, que nous reproduisons figure 6 :

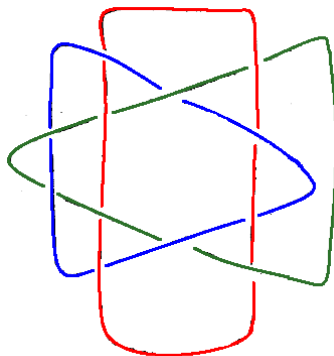


Figure 7 : version colorée du nœud proposé par Soury et présenté par Lacan à la leçon IV

[...] ne peut pas servir à symboliser l'Imaginaire, le Symbolique et le Réel.[...] De sorte que ce dont il s'agit c'est d'une métaphore

[...]

La métaphore du nœud borroméen à l'état le plus simple est impropre. C'est un abus de métaphore, parce qu'en réalité **il n'y a pas de chose qui supporte l'Imaginaire, le Symbolique et le Réel.** Qu'il n'y ait pas de rapport sexuel, c'est ce qui est l'essentiel de ce que j'énonce.

Qu'il n'y ait pas de rapport sexuel parce qu'il y a un Imaginaire, un Symbolique et un Réel, c'est ce

³ C'est d'ailleurs du désarroi engendré par cette position que témoigne l'intervention de Mme Mouchonnat lors de la leçon V.

que je n'ai pas osé dire. Je l'ai quand même dit.

Il est bien évident que j'ai eu tort, mais je m'y suis laissé glisser..., je m'y suis laissé glisser tout simplement. C'est embêtant, c'est même plus qu'ennuyeux. C'est d'autant plus ennuyeux que c'est injustifié. C'est ce qui m'apparaît aujourd'hui, c'est du même coup ce que je vous avoue.

Bien ! »

... Et voilà !!

- Premièrement, il n'y a pas de CHOSE qui supporte l'Imaginaire, le Symbolique et le Réel,
- Deuxièmement, avancer qu'il n'y a pas de rapport sexuel PARCE QU'il y a un Imaginaire, un Symbolique et un Réel, c'est injustifié.

On voit bien qu'il y a un lien étroit entre les notions explorées par Pierre Soury :

Proposer le « nouveau genre d'objet », les chaînes H, pour rendre compte de l'articulation des trois registres R, S, I, c'est autoriser l'auto-traversée des ronds. C'est donc subvertir entièrement la notion de CONSISTANCE d'un registre : un registre ne fait pas obstacle à lui-même. Il n'y a de consistance que mutuelle. Lacan prend donc au sérieux à propos des trois registres R, S, I, ce que dit encore Soury d'une autre façon dans un autre texte concernant l'homotopie (texte 38).

« Troisième point de vue : les chaînes : un nouveau genre d'objet.

Soient plusieurs chaînœuds (chaînes) équivalents par homotopie. On dira qu'ils sont le même genre d'objet, qu'ils définissent le même objet, qu'ils ont le même objet sous-jacent.

Comment appeler les objets ainsi définis ? « chaîne (H) » ou encore « chaînœud-à-l'homotopie-près », ou encore « objet de Milnor », ou encore « objets de pure obstruction mutuelle ». »

Le nœud borroméen classique utilisé par Lacan est maintenant un objet que la « pure obstruction mutuelle » empêche de se défaire, même en acceptant l'homotopie

Les chaînes borroméenne proposées par Soury, au contraire, sont des objets qui se défont si l'on ne prend pas en compte l'auto-obstruction

Il est difficile d'évaluer la portée de cette proposition de Lacan : il n'y a pas de CHOSE qui supporte l'Imaginaire, le Symbolique ou le Réel.

Elle nous semble immense, si l'on fait le lien avec la question de la consistance : l'auto-consistance nous semble en effet ce qui est nié par la notion d'homotopie.

1 Un registre ne consiste pas par lui-même

Par exemple, cela signifie entre-autres – me semble-t-il – qu'il n'est plus possible en toute rigueur d'utiliser les trois termes Imaginaire, Symbolique, Réel comme des adjectifs, des prédicats :

Ceci ou cela EST imaginaire, le père réel, le registre symbolique, toutes ces expressions que nous avons l'habitude de manier en leur prêtant un sens, tout cela est remis en question (rendu inconsistant !) par cette idée d'obstruction mutuelle (et seulement mutuelle) des registres qu'implique l'homotopie.

Cela nous obligerait à les considérer exclusivement par couples :

parler du Symbolique, mais seulement adossé à un Réel ou alors à un Imaginaire ;
parler de l'Imaginaire, mais seulement adossé à un Réel ou alors à un Symbolique ;
etc.

C'est de cela, nous semble-t-il qu'il est question lorsque Lacan déclare :

« La métaphore du nœud borroméen à l'état le plus simple est impropre. C'est un abus de métaphore [...] »

2 L'étoffe constituante des registres est foncièrement discontinue.

Une autre conséquence de cette hypothèse de la possibilité d'auto-traversée des registres R, S, I est que pour que l'auto-traversée soit possible, il faut supposer qu'il existe des « trous », en d'autres termes que l'étoffe dont sont faits chacun des trois registres ne relève en aucun cas du continu. Cela peut se concevoir aisément de l'Imaginaire et du Symbolique, dont nous pouvons facilement imaginer l'étoffe comme constituée d'éléments discrets (grossièrement : des images, des mots). En ce qui concerne le Réel, qui, lui, ne manque de rien, en revanche, le considérer comme constitué d'une étoffe foncièrement discontinue (grossièrement : des choses ?) reste pour moi relativement énigmatique.

3 Qu'appelons nous structure ?

Par ailleurs, si c'est l'homotopie et non plus l'isotopie qui est la transformation propre à décrire ce qui se passe quand survient un événement dans la vie psychique du sujet – et notamment dans la cure – il est clair que cette nouvelle formalisation nous amène à remanier de fond en comble notre représentation de ce que nous sommes habitués à nommer « structure » : ce n'est plus un nœud, une chaîne, un entrelacs, borroméen ou non qui est apte à rendre compte de la structure, mais bien ce « nouveau genre d'objet » – désignable, mais non matérialisable – que Soury désigne du terme de « chaînes H » ou d' « objets de pure obstruction mutuelle » .

On le voit, Lacan ouvre ici un champ de recherche qui n'a que fort peu été exploré jusqu'à présent.

4 Le non-rapport sexuel ne découle pas du fait qu'il y ait les trois registres.

Quelque chose néanmoins y supplée, à ce rapport, quelque chose qu'il est possible d'expliquer et non seulement d'évoquer. Lacan fait en ce point l'hypothèse de l'existence de ce qu'il appelle un troisième sexe, dont le nœud borroméen généralisé serait le support. Il y a là quelque chose qui reste pour nous à interpréter.

Comment pourrions nous désigner ce troisième sexe ?

Pourrions-nous, par exemple dire qu'il s'agit du phallus, celui qui se dévoile au terme de l'initiation dans les mystères antiques ?

Ou alors se pourrait-il qu'il s'agisse de quelque chose d'antérieur au deux, qui, comme le dit Lacan dans la leçon V « ne peut subsister en présence des deux autres » à l'instar du nœud borroméen généralisé qui ne « tient » que tant que l'homotopie ne l'a pas neutralisé, c'est-à-dire réduit à trois ronds séparés.

On le voit, c'est d'une question tout à fait fondamentale et actuelle que Lacan nous entretient à partir de son intérêt pour ce nouvel objet mathématique – ces nouveaux objets mathématiques – : le ou les nœuds borroméens généralisés.

Il y a quelque chose que Lacan appelle une anti-initiation, nommément l'analyse, dont notre pratique reste le support. De cette pratique d'anti-initiation, nous avons le souci, notamment via le séminaire d'été, de transmettre quelque chose, et Lacan le répète avec insistance : ce qui se transmet, c'est le mathème.

A nous donc revient le travail consistant à déplier ce nouveau mathème que constitue le nœud borroméen généralisé, et que constituent plus généralement les chaînes H. C'est mon espoir que ce travail se déploie dans la suite de ces journées.