A propos des binaires

Introduction

Il s'agit de tenter de déplier et d'expliciter ce qui est en jeu dans la discussion qui a lieu durant la leçon VII du séminaire de Lacan "Le moment de conclure". (séance du 21 février 1978).
Lors de l'examen d'une forme compliquée de noeud borroméen,
N.Sels affirme :«C'est le même. C'est retourné comme une crêpe.»
Lacan répond qu'il n'est pas d'accord, et demande à Soury d'intervenir.
Soury : *«Oui. Alors il y a là-dedans, il y a beaucoup d'inversions ...»*
Lacan : *«Il y a de multiples inversions. Il y en a combien ?»*
Soury : *"Ça a tendance à proliférer (la salle éclate de rire) ...*

On peut rapprocher ce court extrait d'un autre extrait, tiré, lui des notes de Soury publiées par Thomé dans le document N° 104 :

Le noeud borroméen nous a fait rencontrer trois références, qu'il faudrait, je crois, d'après ce que dit Lacan, distinguer du noeud borroméen lui-même. Ce n'est pas fait. Les voici :

- *Le 2. Le 2 fait barrage. Le 2 est source d'erreurs, l'erreur est source du 2. Le 2, il faut le laisser proliférer. On ne peut pas maîtriser l'incertitude liée au 2, comme on en a la mauvaise habitude avec les trucs mnémotechniques. Mais on peut contourner cette incertitude, grâce qu fait que l'incertitude liée au 2 est elle-même binaire.*
- *La combinatoire du 3, du 4 et du 6, et le tétraèdre. La combinatoire m'a mis en état de tristesse. "La tristesse de ces espaces infinis m'effraie"*
- *La tresse et l'écheveau. Ce sont des présentations de noeud. Elles assurent que un noeud, c'est comme un rond. Ou encore que plusieurs ronds ....*

Rappelons également que pendant le séminaire RSI, lors des séances des18 mars et 8 avril 1975 furent distribués quatre textes de Soury et Thomé, parmi lesquels le texte intitulé "Les binaires et la liaison des binaires". Rien n'indiquait explicitement le lien entre ce texte et les autres, qui traitaient de problèmes liés aux noeuds borroméens monochromes ou non, orientés ou non.

1 Un modèle simple : le groupe de Klein[1]

1.1 Avec des pièces de monnaie

Deux pièces de monnaie posées côte à côte forment un système à quatre états, si l'on se donne le moyen de distinguer les pièces entre elles (ici, on choisira de distinguer "celle de gauche" et "celle de droite") :

1. PP : Pile Pile
2. PF : Pile Face
3. FP : Face Pile
4. FF : Face face

1 D'après Darmon : Essais sur la topologie lacanienne

Il existe des opérations qui permettent de passer de l'un des états à l'autre :

1. RG : Retourner la pièce de Gauche
2. RD : Retourner la pièce de Droite
3. R2 : Retourner les deux pièces

auxquelles on rajoute

4. I : Ne rien faire (I comme identité)

Les 4 opérations sont leur propre inverse :
I suivie de I donne I, évidemment
RD suivi de RD donne I
RG suivi de RG donne I
R2 suivi de R2 donne I

On vérifie facilement que lorsqu'on effectue deux opérations successivement, l'ordre est sans importance. En d'autres termes l'opération entre opérations définie par : «suivie de» est commutative :
RD (ou RG) suivi de R2 est identique à R2 suivie de RD (ou RG)

D'où le graphe «tétraèdrique» :

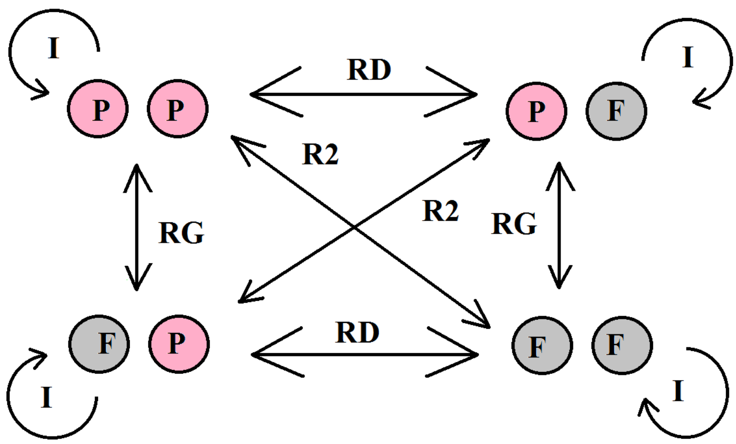


Figure 1 Le groupe de Klein pour les pièces de monnaie

Et la table de l'opération «suivie de» :

Suivi de	I	RD	RG	R2
I	I	RD	RG	R2
RD	RD	I	R2	RG
RG	RG	R2	I	RD
R2	R2	RG	RD	I

1.2 Avec des noeuds borroméens :

On considère le système constitué par un noeud borroméen à 3 ronds dont on se donne le moyen de les distinguer les uns des autres. On adopte la convention :
R : le réel est représenté par le rond rouge
S : Le symbolique est représenté par le rond bleu
I : l'imaginaire est représenté par le rond vert

La mise à plat d'un tel noeud peut se présenter de 4 façons différentes[2] :

1. RSI Lévogyre
2. RSI Dextrogyre
3. RIS Lévogyre
4. RIS Dextrogyre

On définit à nouveau des opérations permettant le passage d'un état à l'autre

1. I : Ne rien faire
2. RA : Retournement d'Anneau : Conserve l'ordre (RSI ou RIS) , inverse la gyrie

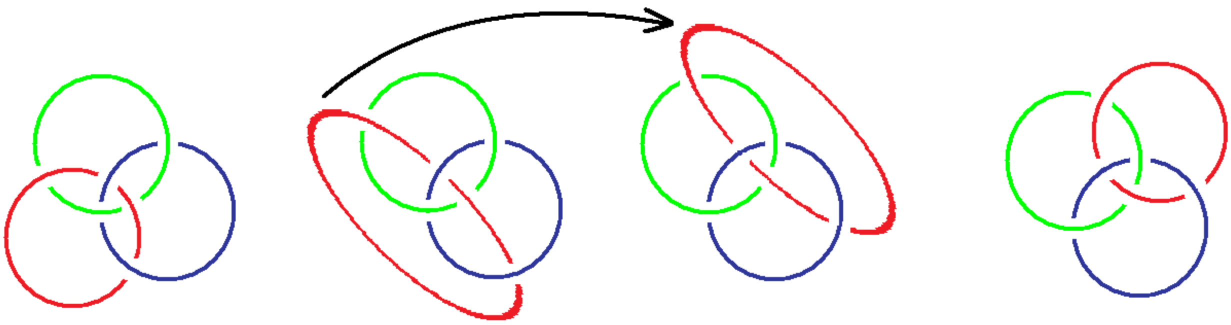


Figure 2 : un exemple de retournement d'anneau

3. RP : Retournement de Plan (Soury) : comme une crêpe ; Conserve la gyrie, inverse l'ordre

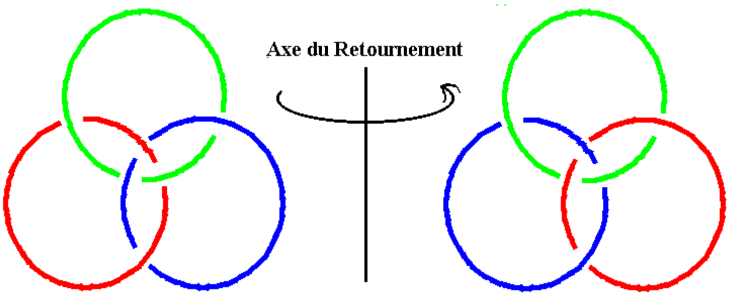


Figure 3 : un exemple de retournement de Plan

4. RG : Retournement global : inverse à la fois la gyrie et l'ordre

2 Pour les définitions de l'ordre et de la gyrie d'une mise à plat du NB, on peut par exemple suivre le lien : https://drive.google.com/file/d/0BxJP7RgqWcgqU0d4NGV1Ul82LWM/edit?usp=sharing

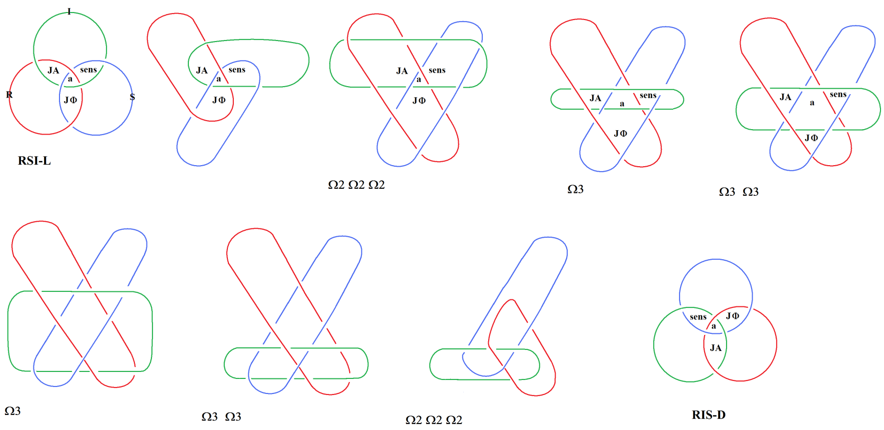


Figure 4 : un exemple de retournement global

On obtient un résultat strictement identique au précédent du point de vue de la structure :

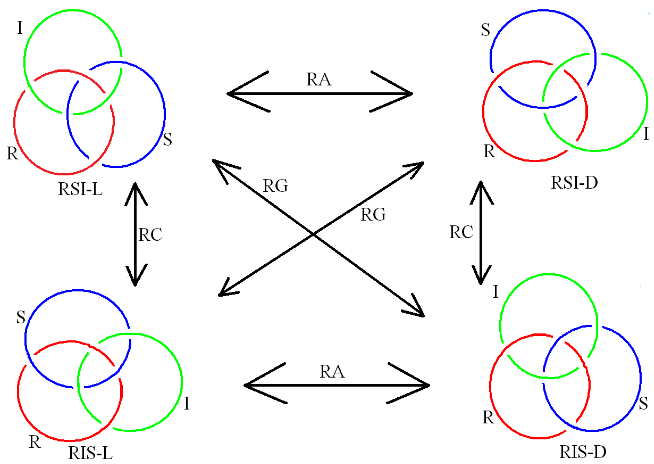


Figure 5 : Groupe de Klein du noeud borroméen coloré.

2 Au delà du groupe de Klein : Le noeud borroméen orienté (monochrome ou non)

Considérons d'abord le noeud borroméen monochrome, pour lequel chaque rond est affecté d'une flèche, indiquant le sens dans lequel il est parcouru. Chaque rond est donc orienté, à gauche ou à droite.

Combien d'états du système ?
La gyrie subsiste
L'ordre disparaît : les ronds sont indiscernables
les orientations respectives apparaissent
d'où 8 états :
Lévogyres : DDD DDG DGG GGG
Dextrogyres : DDD DDG DGG GGG
Remarque : Les états sont indexables par un nombre binaire :

	DDD	DDG	DGG	GGG
Lévogyres	000	001	010	011
Dextrogyres	100	101	110	111

Les transformations sont les même, mais leur effet est plus complexe :
Le retournement d'anneau inverse la gyrie ET l'orientation d'un anneau unique. Il conserve donc la parité du mot binaire indexant le noeud considéré. De plus, il faut parfois, mais pas toujours, distinguer QUEL anneau est retourné ; celui qui est seul ou celui qui fait partie d'un couple de 2 de même orientation.
Le retournement de plan conserve la gyrie ET inverse les TROIS orientations des ronds du noeud. Il inverse la parité du mot binaire indexant le noeud considéré.
Le retournement global inverse la gyrie et conserve l'orientation des TROIS ronds. Il conserve la parité du mot binaire indexant le noeud considéré.

Le graphe résultant est plus complexe que le précédent :

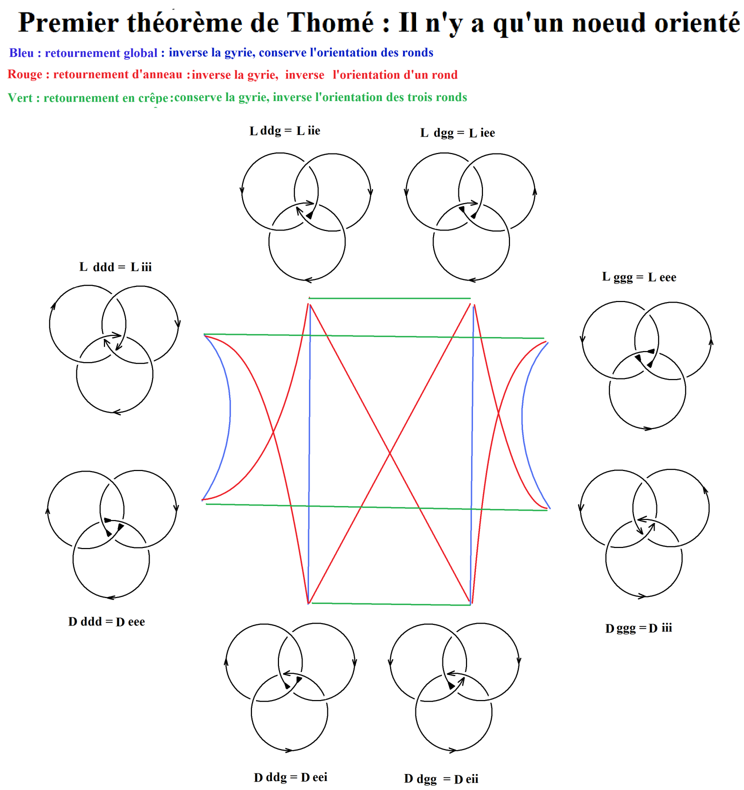


Figure 6 : Diagramme des mises à plat du noeud borroméen monochrome orienté

Ce graphe est une représentation de ce qu'on pourrait appeler la structure sous-jacente au nœud borroméen monochrome orienté. Il ne s'agit plus d'un groupe de Klein, mais d'autre chose, plus complexe.

L'essentiel – nous semble-t-il – est que l'étude détaillée

- des états du système et
- des transformations qui permettent de passer de l'un à l'autre de ces états

permet de répondre à la question : combien y a-t-il de noeuds borroméens monochromes orientés distincts ?
La réponse est, comme pour le noeud borroméen coloré mais non orienté : un seul.

On pourrait poursuivre l'étude par l'examen de ce qui se passe pour un noeud borroméen coloré ET

orienté. La technique est la même :
- établir le répertoire de tous les états possibles, sans omission et sans répétition
- associer le cas échéant un mot binaire à chacun de ces états
- définir les transformations qui permettent de passer d'un état à l'autre
- étudier l'effet de ces transformations sur le système et sur le mot binaire associé.

La description du diagramme correspondant serait fastidieuse, mais elle aboutit à un résultat intéressant qui est le suivant : dans le cas du noeud borroméen à la fois coloré et orienté, le système possède maintenant 32 états, mais ces états se répartissent en deux groupes de 16 entre lesquels aucune transformation (physique) ne permet d'effectuer le passage.
La conclusion est donc qu'il existe 2 noeuds borroméens colorés orientés. Ce qu'affirme Soury, sans le démontrer rigoureusement, dans un des textes distribués en 1975, et annexés au séminaire" RSI.

3 A propos de la Leçon 7

Au début de la leçon 7, Lacan nous rappelle la structure à laquelle il était arrivé en fin de leçon 6, à savoir un noeud borroméen à trois ronds, mais un peu spécial, en ceci qu'il s'agit de trois ronds qui sont d'abord "accrochés" de la manière dont il avait parlé dans le séminaire RSI sous le terme d' "undercrossing".

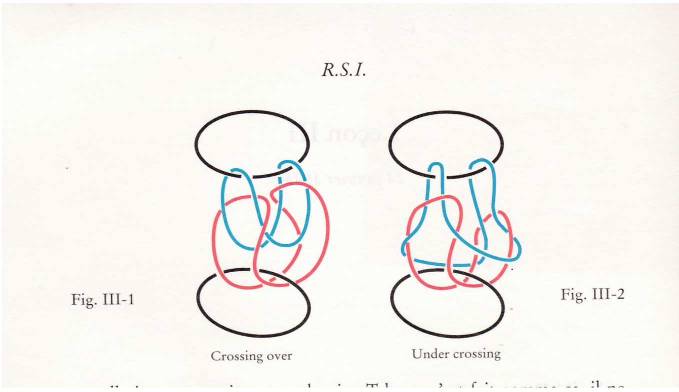


Figure 7 : les deux modes d'accrochage de RSI

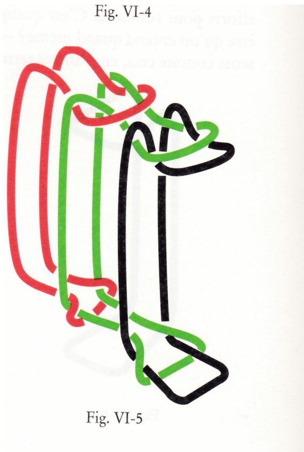


Figure 8 : Trois ronds "accrochés"

Cette manière d'accrocher les ronds permet d'en faire une chaîne aussi longue qu'on veut, validant ainsi l'analogie avec la suite des nombres naturels dont il a été question dans la leçon VI du 10 janvier 1978. La question subsiste et elle est à notre avis centrale : Où est-ce que ça commence ? A 1, à 2 ou à 3 ? C'est le sens de l'exploration menée par Soury sous l'impulsion de Lacan, concernant les cas « dégénérés » et « générateurs » pour diverses structures nodales. Nous assistons dans cette leçon aux avatars d'une (parmi d'autres) de ces explorations.

La deuxième étape du nouage consiste à "reboucler" le dernier rond et à l'accrocher au premier de façon identique.[3]

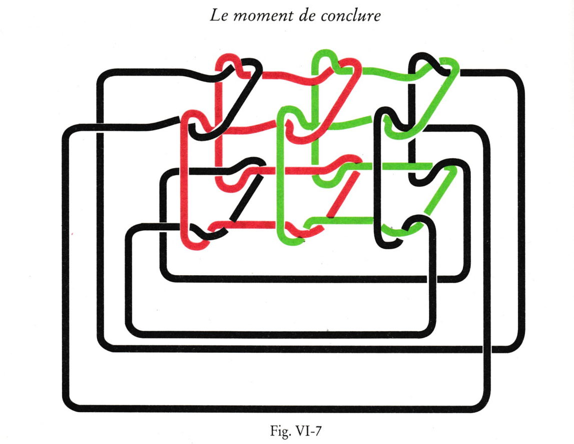


Figure 9 : Un noeud borroméen obtenu par rebouclage.

Et Lacan ajoute :
« Oui, grâce à Soury, ici présent, j'ai pu obtenir la transformation de cette chose triple que j'ai essayé de reproduire là, cette chose à trois éléments, grâce à Soury, donc, par une transformation progressive, nous avons quelque chose qui a les mêmes trois éléments. »

Lacan désigne ici – nous semble-t-il – la figure suivante (VII-2), dans laquelle apparaissent deux configurations :

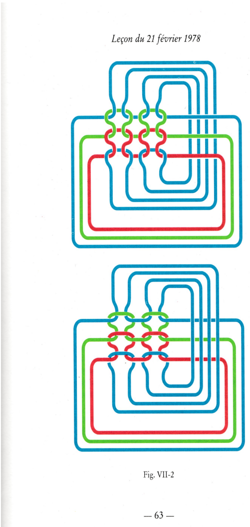


Figure 10 : Le nœud de la figure 9, mis à plat de deux façons différentes

Notons ici que le fait que la figure 10 soit la mise à plat de la figure 9 n'est pas tout à fait évident. On trouve dans les notes de Soury des figures qui explicitent cette mise à plat en introduisant des étapes intermédiaires. Voici une de ces figures, qui rend – à notre avis – les choses plus visibles[4] si

3 ...ce qui nécessite de couper puis de rabouter le rond en question, comme pour la réalisation d'un noeud borroméen ordinaire.

4 ... car c'est bien de visibilité qu'il s'agit, dans ces monstrations.

on la lit de bas en haut et de gauche à droite, selon les numéros que nous avons insérés.

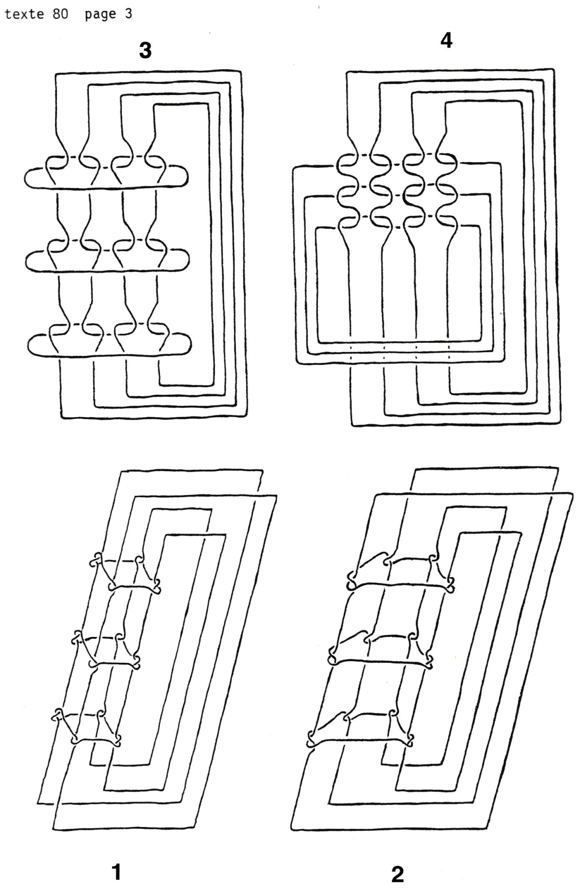


Figure 11 : étapes de la mise à plat de la figure 8 selon Soury

Cette figure nous permet également d'imaginer la raison pour laquelle Soury baptise ces structures de « tricots toriques ». Il s'agit en effet de structures qui peuvent se projeter sur un tore en « l'habillant » comme le ferait une chaussette ou une manche. Il ne s'agit cependant pas de « nœuds toriques » au sens classique en théorie des nœuds.[5]

Une partie de la discussion de la Leçon 7 porte sur la question de savoir si les deux structures de la figure 9 (VII-2 dans la leçon) décrivent le même objet ou non.
C'est là qu'intervienne les binaires, à savoir en l'occasion les opérations qui permettent de transformer l'une en l'autre.

Il est facile de s'apercevoir que la figure du bas est déduite de la figure du haut en transformant tous les dessus en dessous et vice-versa. C'est une première façon de passer de l'une à l'autre, mais il s'agit de ce que Soury appelle un artifice. En effet, échanger les dessus-dessous est une opération sur l'image, sur la figure, c'est à dire sur l'écriture sur papier du nœud. Il ne lui correspond a priori aucune opération « physique » qui permettrait un passage matériel équivalent.
N.Sels affirme que la figure du bas est obtenue en retournant celle du haut comme une crêpe, mais elle se trompe, comme le montre la figure suivante :

5 Un noeud ou un entrelacs torique au sens classique du terme est un noeud qui peut être tracé sur un tore sans qu'il y ait jamais intersection. Ainsi, le noeud de trèfle, et le noeud olympique sont des noeuds 1-toriques. Le noeud borroméen peut être tracé sur un tore à trois trous. C'est donc un noeud 3-torique. Il ne s'agit pas de cela ici.

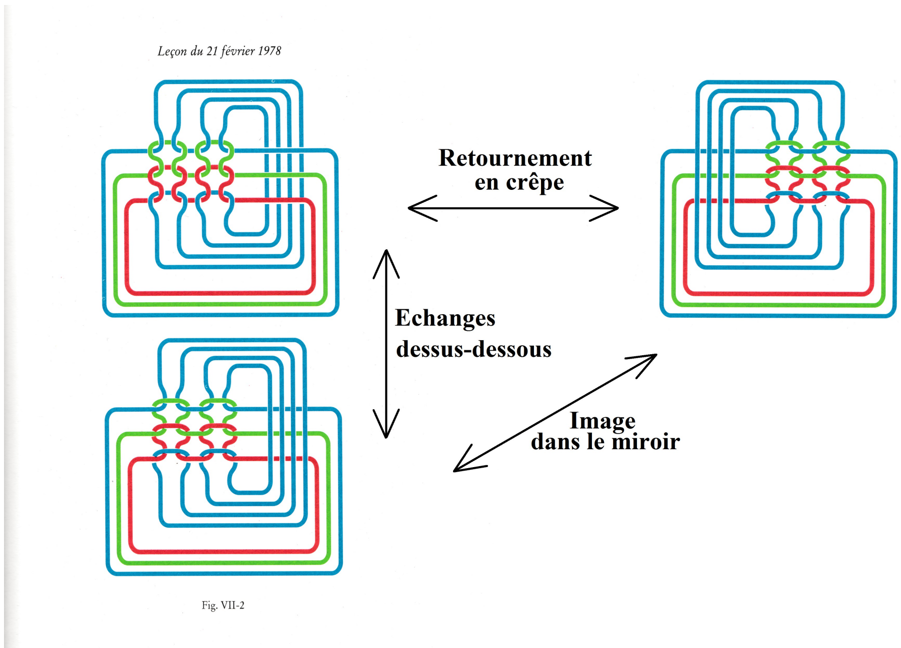


Figure 12 : La figure VII-2 du bas est l'image dans le miroir de la retournée du haut

On voit qu'effectivement les binaires « ont tendance à proliférer » comme le dit Soury, puisqu'ici, une simple question suffit à en faire apparaître trois distincts.

Il peut néanmoins être montré que les deux figures (VII-2 du haut et VII-2 du bas) représentent le même objet. La figure ci-dessous le montre en explicitant les opérations « physiques » nécessaires, à savoir quatre « retournements de boucle[6] » suivis d'un retournement en crêpe.

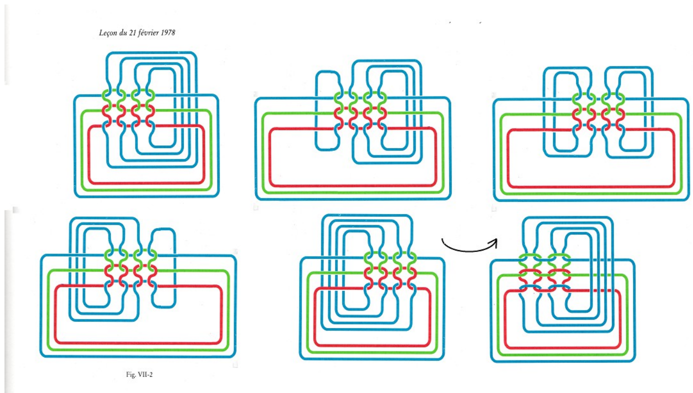


Figure 13 : Passage « physique » de la figure VII-2 du haut à la figure VII-2 du bas

N.Sels avait donc raison dans sa conclusion : « ce sont les mêmes » mais son raisonnement était incomplet.

4 Compléments

La suite de l'histoire se trouve dans les documents distribués au séminaire à la leçon suivante (Annexes de la leçon VIII)

6 La figure nous paraît suffisamment explicite pour qu'il ne soit pas nécessaire de définir ce que nous appelons retournement de boucle. Il s'agit de faire passer de droite à gauche successivement les quatre portions verticales du rond bleu, par l'arrière de la figure, comme on tourne une page, et en remaniant leurs tailles respectives.

On y trouve Figure VIII-a huit mises à plat numérotées de 1 à 8 de la structure étudiée à la leçon VIII. Soury les désigne du terme « Schémas carrés ou peignes », et semble soutenir que les dessins 1,2,3,4 représentent un objet différent de 5,6,7,8.

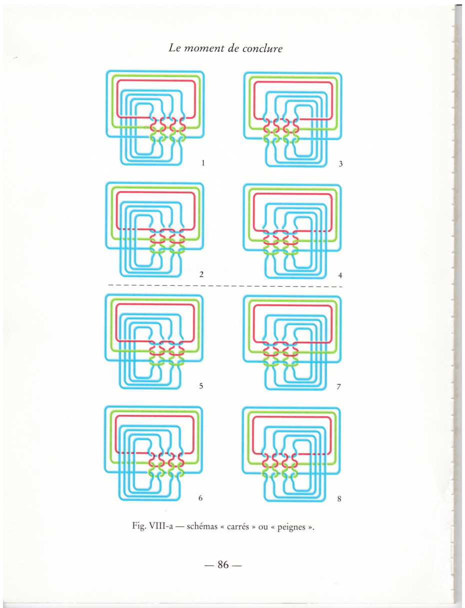


Figure 14 : Figure VIIIa de l'annexe de la leçon VIII : tricots toriques

La figure VIII-b représente une version arrondie des mêmes structures, les « Schémas ronds ou cercles » numérotés de 10 à 80.

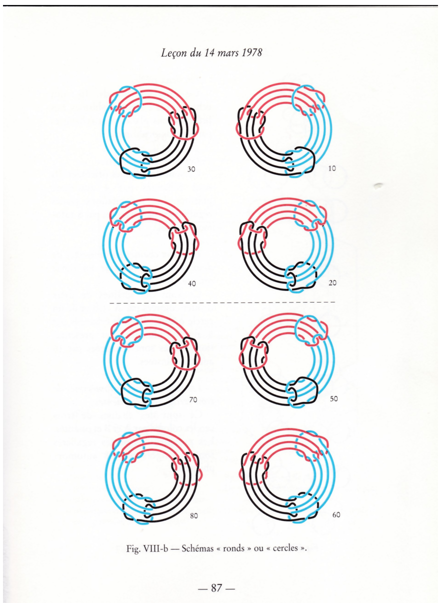
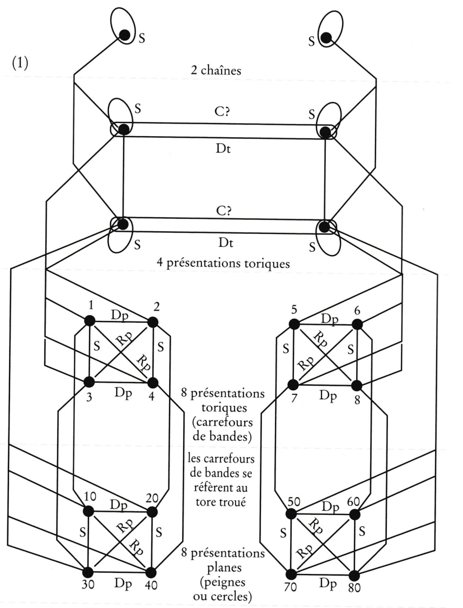


Figure 15 Tricots toriques : Schémas ronds

La figure VIII-c semble hors-sujet, à ceci près qu'elle se rapporte aussi aux transformations du nœud par des opérations binaires. Elle renvoie très nettement aux documents distribués lors des leçons 8 et 9 du 18 mars et du 8 avril 1975 du séminaire RSI.

Il devient alors possible d'interpréter la figure VIII-d

Leçon du 14 mars 1978



S = symétrie
Rt = retournement de tores
Dt = échanger les dessus/dessous sur le tore
C = retournement du tore par coupure. Quelle est la généralité de cette opération?

Rp = retournement de plan
Dp = échanger les dessus/dessous sur le plan (artifice)
(1) retournement se référant au tore troué

Fig. VIII-d — Diagramme affiché au tableau par Soury

— 89 —

Figure 16 : Figure VIII-d de l'annexe : diagramme de la structure des mises à plat du nœud de la figure VII-2 organisées par diverses transformations binaires

Cette figure est l'homologue des diagrammes plus simples que nous avons présentés ci-dessus. Il s'agit de rendre compte de la structure sous-jacente à un type particulier de nœud borroméen, mis à plat, et soumis à diverses transformations. Ces dernières s'organisent selon un diagramme qui décrit un certain type de groupe (ici commutatif).

On voit que cette étude est dans le droit fil des préoccupations de toujours de Lacan, à plusieurs titres, entre autres :
Le réel est tissé par le nombre, mais quel sens donner à cela ?
Quelque chose commence à 3, mais quoi ?
Comment écrire le non-rapport sexuel ?
Une structure de groupe est exigible pour rendre compte de la suite des objets a, mais laquelle ?

On peut aussi remarquer l'extrême généralité de cette recherche dès lors qu'on remarque que le binaire comme objet mathématique n'est pas très éloigné du concept, ou du prédicat :
Un état d'un système est caractérisé par un certain nombre de binaires : être ou ne pas être blanc, lévogyre, torique, homme, etc ...
Une transformation binaire appliquée à un système change certains de ces attributs, en conserve d'autre. Toute complexité combinatoire se ramène-t-elle à cela ou y a-t-il autre chose ?
… à suivre.