Qu'est-ce qu'une logique intuitionniste ?

1 Introduction

Je voudrais commencer par quelques points d'histoire des mathématiques.
Lorsque Cantor avança sa théorie des ensembles, avec sa découverte fondamentale, selon laquelle il existait deux types d'infini au moins, le dénombrable et le continu, il recontra d'abord, notamment de la part de Kronecker, une résistance considérable. Il lui était en effet reproché de traiter d'entités illusoires, de fantaisies à l'allure mathématique qui n'avaient aucune réalité. Il s'agissait par exemple des ensembles de cardinaux infini comme l'ensemble de tous les nombres entiers, ou l'ensemble des points du segment [0,1]. Pour Kronecker[1], traiter de ces ensembles, c'était poser l'infini comme actuel, comme pouvant entrer dans un raisonnement mathématique en tant qu'entité constituée, ce qui n'avait jamais été fait jusqu'alors, et était considéré comme une pratique menant à des absurdités.

La découverte des antinomies[2] au début du XXe siècle sembla donner raison à Kronecker : il y avait bien quelque chose qui n'allait pas dans la logicisation des mathématiques telle que développée par Cantor, mais aussi par Frege, Russell et d'autres. Cela suscita des réactions et de discussions passionnées. Il ne fallait pas, disait Hilbert, se laisser chasser du paradis qu'avait créé Cantor. Imre Hermann, psychanalyste disciple de Ferenczi s'est intéressé de près aux diverses réactions qu'à suscitées dans la communauté mathématiques la découverte des antinomies. Il distingue :

- La réaction de Russell qu'il rapproche d'une réaction de type phobique : création de la *théorie de types* qui met en place une série d'interdits dans le développement des raisonnements logiciste.
- La réaction de Hilbert, qu'il rapproche d'une réaction psychotique : Hilbert propose de recourir à un strict *formalisme* et d'identifier l'existence mathématique à la non-contradiction à l'intérieur d'une théorie qu'il s'efforce de ramener à un pur jeu d'écriture.
- La réaction de Brouwer, qualifiée d' *intitionniste*, qu'il rapproche d'une réaction de type obsessionnel. Cette réaction est une critique sévère du formalisme de Hilbert : à l'inverse de celui-ci, Brouwer soutient que la théorie mathématique relève du langage - nécessairement ambigü dit-il ! - et que derrière cette théorie, il y a une réalité (*Inhalt* : un contenu) qui lui est extérieure, et qui peut en différer sensiblement. Brouwer est l'héritier de Kronecker en ceci qu'il admet que la théorie peut nous faire concevoir des entités idéales n'ayant aucune réalité et qu'il s'agit de les débusquer.

C'est de la position de Brouwer que je voudrais maintenant tenter de vous donner le parfum, Il me semble en effet qu'elle peut nous donne quelques accès inédits aux questions logiques que Lacan soulève dans le séminaire *Encore.* Lacan connaissait l'intuitionnisme de Brouwer, s'est manifestement appuyé sur certains résultats intuitionniste, mais ne s'y est pas arrêté. C'est ce que j'espère pouvoir illustrer dans la suite.

2 Un théorème

Préliminaire : Chacun sait que parmi les nombres réels, il en existe de deux catégories : ceux qui sont qualifiés de rationnels, qui peuvent s'écrire comme le rapport de deux entiers $z=\frac{r}{s}$, et les autres ceux qui ne peuvent pas s'écrire ainsi, et sont donc qualifiés d'irrationnels.

1 Pour Kronecker, en effet "Dieu a créé les nombres entiers, tout le reste a été fabriqué par l'homme"

2 Le paradoxe de Russel : ensemble des ensembles qui ne se contiennent pas eux mêmes, le paradoxe de Richard : le plus petit des nombres qui ne peuvent être définis en moins de 100 mots, etc...

Théorème : Il existe deux nombres a et b irrationnels tels que a^b soit rationnel.
Démonstration :
On sait depuis Pythagore que $\sqrt{2}$ est irrationnel. Considérons le nombre $z=(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$

- Soit il est rationnel. Dans ce cas il suffit de poser $a=\sqrt{2}$ et $b=\sqrt{2}$. Les deux nombres cherchés existent bien et sont tous deux égaux à $\sqrt{2}$.

- Soit il est irrationnel. Dans ce cas, posons $a=(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ et $b=\sqrt{2}$. Calculons a^b . Nous obtenons $a^b=((\sqrt{2})^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}=(\sqrt{2})^2=2$ qui est bien rationnel.
  Les deux nombres cherchés existent donc bien à nouveau. Ils sont maintentant égaux à $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ et à $\sqrt{2}$ respectivement.

Voilà une démonstration courte et bien ficelée qui semble ne soulever aucune objection, et qui cependant n'est pas reconnue comme valable par Brouwer.
En effet, on voit bien qu'il manque une donnée dans cette démonstration, qui est la réponse à la question : "le nombre z est-il rationnel ou irrationnel ?". Le raisonnement s'appuie entièrement sur le principe – inclus dans les axiomes de la théorie des ensembles – du *tiers exclu,* qui fait partie de la logique depuis Aristote (*tertium non datur*).
Pour le logicien classique Il n'y a là rien à redire, dans la mesure où les deux propositions "z est rationnel " et "z est irrationnel" sont contraires : l'une est la négation de l'autre, et il n'y a pas d'autre alternative, donc de toute façon, le théorème "Il existe deux nombres a et b ..." est vrai.

La logique intitionniste est celle qui récuse cet argument, c'est à dire qui interdit de recourir au principe du tiers exclu lorsqu'il concerne des entités non-encore construites ou des propriétés non-encore établies. Or c'est bien le cas ici : la propriété "z est rationnel" ou son contraire " z est irrationnel" ne sont pas établies.
Que faudrait-il faire pour l'établir ? C'est là que Brouwer et Lacan "se frôlent" pourrait-on dire. En effet , montrer que z est rationnel revient à montrer qu'il existe deux entiers r et s qui fassent "rapport" pour z : $z=\frac{r}{s}$, et pour cela, deux voies peuvent être choisies :

- Soit nous nous engageons dans l'exploration de la suite des couples d'entiers, en essayant de trouver le couple qui fasse rapport, en les testant un par un ... et cela peut durer longtemps, surtout si c'est faux ! : nous tentons ce faisant de trouver r et s tels que $z=\frac{r}{s}$ ou encore de montrer que :
$$\exists(r,s)\, z=\frac{r}{s}$$
- soit nous tentons de montrer (par une démonstration qui reste à inventer !) que l'hypothèse $z\neq\frac{r}{s}$ conduit à une absurdité ou à une contradiction, auquel cas nous aurons montré que :
$$\neg\forall\,(r,s)\, z\neq\frac{r}{s}$$

C'est très clairement la disjonction entre "pas tous"[3] et "il y en a qui pas" qui est ici illustrée. Pour les ensembles infinis, la logique intuitionniste distingue deux moyens différents d'accès à la vérité là où la logique classique n'en voit qu'un seul.

Mais ce n'est pas tout. Brouwer sait en effet ce qui a été mis en exergue par Borel, et souligné

3 ou plus précisément, il n'est pas vrai que pour tous ...

également par Lacan[4], à savoir que les nombres entiers parmi lesquels il s'agit de trouver - ou de ne pas trouver - le couple (r, s) qui ferait rapport pour z forment un ensemble infini, et que par conséquent ces nombres nous sont pour la plupart radicalement inaccessibles[5]. Il peut donc parfaitement arriver la chose suivante : le couple (r, s) "existe" mais est formé de deux entiers inaccessibles, la quète de r et s vérifiant $\exists (r, s) z=\frac{r}{s}$ est donc vouée à l'échec, et en même temps, la démonstration de $\neg \forall (r, s) z \neq \frac{r}{s}$ n'existe pas. C'est le *tiers cas* qui autorise Brouwer à refuser toute validité au raisonnement ci-dessus ainsi qu'à tout raisonnement fondé sur le principe du tiers exclu dès lors que des ensemble infinis sont en jeu.

Pour Brouwer, la question du caractère rationnel ou irrationnel d'un nombre réel comme la question de l'égalité de deux réels sont des questions pour lesquelles la réponse doit être construite concrètement. Si ce n'est pas le cas, Brouwer considère qu'elles sont indécidables, et que donc le principe du tiers exclu ne s'applique pas.

J e voudrais revenir ici sur ce qui fait à mon sens l'intérêt du *tiers cas* pour nous. Dans notre exemple, le couple (r, s) "existe" en effet sur un mode tout à fait particulier. En effet, la logique intuitionniste met précisément l'accent sur le caractère définitivement <u>fini</u> de ce qui nous est vraiment accessible. Pour Borel, Poincaré ou Brouwer, le couple (r, s) est en fait une "fantaisie mathématique" sans consistance, sans relation avec la "réalité" mathématique, du fait que r et s ne peuvent être définis en un nombre fini de mots. C'est en quoi ils s'opposent au formalisme.

Nous pouvons, quant à nous après Lacan, dire les choses autrement : un rapport constitué de termes qui existent mais qui ne sont pas accessible, c'est un rapport qui n'est pas accessible au symbolique, ce qui peut s'entendre : qui ne peut s'écrire voire qui ne cesse pas de ne pas s'écrire. On entend bien à quel point les formulations de Lacan concernant le rapport sexuel sont proches de celles qui concernent notre rapport $\frac{r}{s}$. Par exemple, dire que tout ce qui est homme n'est pas femme conduit à une absurdité, en raison du fait qu'il n'y a pas de rapport sexuel inscriptible, et que donc le rapport sexuel, s'il existe, relève du *tiers cas*.

3 Le tiers cas qui moebianise

Puisque ces journées sont consacrées à déployer les conséquences éthiques et politiques du séminaire *Encore*, il me semble important d'insister sur ce *tiers cas*, récusation du tiers exclu, débusqué par Brouwer dans les mathématiques de l'infini. Il me semble en effet que le défaut repéré par Brouwer dépasse largement la logique mathématique pour s'appliquer aussi bien partout où des ensembles infinis sont en jeu, et tout particulièrement dans le domaine de la logique du signifiant. Partout où une logique binaire est à l'oeuvre - c'est à dire quand même en bien des points de notre espace social et culturel - nous pouvons soupçonner et donc tenter de repérer une utilisation abusive du principe du tiers exclu, et partant, tenter de repérer et de spécifier le tiers cas, ce qui n'est pas toujours facile, il faut le reconnaître.
Lors des journées de l'ALI sur la méditerranée en mars 2010, Pierre-Christophe Catelineau avançait une hypothèse topologique dont la force et la portée m'ont frappé, et qui ne me semble pas sans rapport avec ce repérage du *tiers cas.*
Pierre-Christophe Cathelineau avançait en substance, – il est là pour rectifier si je déforme son propos – qu'il convenait de distinguer dans les cultures, les situations où deux idéologies, deux discours, deux espaces littéraux s'opposent l'un à l'autre dans une topologie de bande biface, et les situations où un bord commun parvient à s'écrire. Dans le cas du Xe siècle andalou, ce serait la

4 Au congrès de la Grande Motte en novembre 1973.
5 Borel J. Les nombres inaccessibles 1952

logique d'Aristote qui, faisant bord commun aux cultures qui se cotoyaient à Cordoue aurait rendu possible de mettre – au moins sur certain points – en continuité les espaces littéraux qui s'affrontaient.
Il me semble que la mise en place que Lacan tente dans Encore peut se lire comme une tentative du même ordre mais généralisée. Cette mise en place passe par la reprise du repérage intuitionniste du tiers cas, et aussi par la mise en question extrêmement générale de tout ce qui relèverait d'une logique du tiers exclu :

- tout ce qui n'est pas rationnel est irrationnel
- tout ce qui n'est pas homme est femme

Mais aussi bien

- tout ce qui n'est pas bon est mauvais
- tout ce qui n'est pas moi est autre

Bref, tout ce qui n'est pas x est y.
Pour nous, le repérage du tiers cas dans la logique du signifiant est précisément ce qui nous préserve de toute constitution d'un espace littéral biface, il fait partie des outils qui permettent de moebianiser une situation où l'affrontement binaire prévaut a priori. On aperçoit ici à quel point une question de logique qui peut sembler abstraite peut avoir des conséquences éminemment pratiques.

4 Lacan au delà de l'intuitionnisme

L'intuitionnisme se démarque du formalisme en ceci qu'il disjoint l'écriture mathématique de ce dont elle parle. L'intuitionnisme reconnaît le caractère d'approximation des écritures mathématiques au regard d'une réalité mathématique dont il souligne le caractère jamais complètement accessible. Les théories mathématiques ne valent qu'au regard de leur contenu qui se rapporte à quelque chose qui est posé comme extérieur.
Il me semble qu'on peut avancer qu'au contraire du formalisme qui ne reconnaît comme réel que ce qui relève d'une pure manipulation symbolique, l'intuitionnisme met en place la disjonction entre le système d'écriture d'une part, la réalité à laquelle il se rapporte d'autre part, autant dire entre le symbolique et l'imaginaire. L'intuitionnisme se situe au lieu de jonction entre les deux, au lieu du sens.
Lacan, dans le séminaire à l'étude l'an prochain, Les non-dupes errent, précisera d'ailleurs (leçon du 19 février 1974) que le savoir inconscient s'invente, ne se découvre pas, y ajoutant «et voyez-y tout les échos d'intuitionnisme que vous voudrez.»
Il me semble que la logique du signifiant à laquelle nous convoque Lacan est bien du côté de l'intuitionnisme en ceci qu'elle prend en compte d'emblée le tiers cas. Mais en introduisant – en écrivant, c'est bien d'une écriture qu'il s'agit - le troisième rond, celui du réel, Lacan fait surgir

- d'une part la dimension phallique : la disjonction entre symbolique et réel qui s'était déjà manifestée en mathématiques lors de la crise des paradoxes
- d'autre part la dimension de la disjonction entre imaginaire et réel, et c'est là que surgit quelque chose de nouveau par rapport à l'intuitionnisme : du réel est posé, distingué de ce à quoi se rapporte la théorie (la réalité) .

Or de la rencontre du réel et de l'imaginaire surgit la jouissance Autre, celle dont rien ne peut ni s'écrire ni se dire, et qui se situe à mon sens dans le fait que l'infini, même dénombrable, ça ne s'épuise pas. Lacan ne dit-il pas, et j'en resterai là, que la barre, le "pas" du "pas-tout", il faudrait le remplacer par $\aleph_0$.