L'argument diagonal revient à repérer un point fixe

Jean-Yves Girard, dans son cours de logique[1] met l'accent sur le fait que la méthode de la diagonalisation, repose toujours sur le repérage d'un point fixe pour une certaine fonction :

> *L'argument diagonal :*
> *Cet argument consiste, à partir de fonctions g(z) et f(x,y) à former h(x)=g(f(x,x)) ; si par hasard on peut mettre h sous la forme h(x)=f(x,a), on obtient h(a) = f(a,a) = g(f(a,a)), un point fixe de g, ce qui est évidemment inattendu. En fonction du contexte, on en tirera diverses conclusions, le plus souvent paradoxales.*

Les parties de N sont innombrables :

Ce raisonnement très général sert, par exemple, à démontrer que l'ensemble des parties de **N** n'est pas dénombrable :
Supposons que toute partie de **N** puisse être numérotée.
Par exemple : $X_1 = \{1, 3, 5,\dots\}$: les nombres impairs
$X_2 = \{1, 4, 7, 10,\dots\}$: les multiples de 3 + 1
$X_3 = \{1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \dots\}$: les nombres premiers
$X_4 = \{1, 25, 10^{25}, 12\}$: quatre nombres quelconques
….
Ceci pour faire observer qu'il y a beaucoup de parties X_i de **N** et que la numérotation des X_i est parfaitement arbitraire.

On définit alors la fonction f(n,m) comme suit :
f(n, m) = 1 si n fait partie de l'ensemble X_m
f(n, m) = 0 si n ne fait pas partie de l'ensemble X_m
Par exemple : f(4, 2) = 1 ; f(8, 3) = 0.

On définit ensuite g comme la négation booléenne : g(1) = 0, g(0) = 1.

Il en résulte que h(n) = g(f(n,n) est égale à 1 lorsque n est le numéro d'une partie de N qui contient son propre numéro. égale à 0 dans le cas contraire. Ainsi, dans les exemples ci-dessus, h(1) = 1, h(2) = 0, h(3) = 1, h(4) = 0.

Soit alors a le numéro de l'ensemble des numéros des ensembles qui ne contiennent pas leur propre numéro :
X_a={ n|f(n, n) = 0 } = {n|n ne fait pas partie de X_n}

On constate qu'on a bien :
h(n) = g(f(n,n)) = f(x,a) et donc h(a) = g(f(a, a)) = f(a, a)

Le nombre f(a, a) qui peut valoir 1 ou 0 est un point fixe pour la fonction négation g, qui , par définition n'en a pas !
On en conclut que l'ensemble des parties de N n'est pas numérotable, ou que la liste des X_i est nécessairement incomplète.

Les réels compris entre 0 et 1 sont innombrables :

Ici, la fonction f(n,m) est définie comme un nombre entier : la n-ième décimale du m-ième nombre de la liste qu'on suppose écrite des nombres réels compris entre 0 et 1.
g(n) sera définie comme le nombre entier immédiatement supérieur à n, modulo 10 : g(0) = 1, g(1) = 2, … , g(9) = 0.
Par définition, h(n) = g(f(n, n)), mais h(n,) peut aussi s'écrire f(n,a), à condition de définir a comme le numéro (entier) du nombre (réel) tel que :

[1] Jean-Yves Girard, Le point aveugle, Cours de Logique 1 septembre 2006

$$\forall i, f(i, a) = g(f(i, i))$$

En d'autres termes, le nombre a est constitué par la suite de décimales { f(1, 1) + 1, f(2, 2) + 1, …}soit les décimales de la diagonale du tableau augmentées chacune de 1.

Le nombre a est donc tel que f(a, a) soit un point fixe pour la fonction g, qui par définition n'en a pas. On en conclut que la liste exhaustive des nombres réels compris entre 0 et 1 ne peut être dressée.

L'ensemble des ensembles qui ne se contiennent pas eux mêmes

La fonction f est maintenant définie comme une fonction dont les variables sont des ensembles :

f(x,y) = 1 signifie que l'ensemble x contient l'ensemble y
f(x,y) = 0 signifie que l'ensemble x ne contient pas l'ensemble y

g(z) est à nouveau la négation booléenne : g(1) = 0 ; g(0) = 1.

Posons à nouveau h(x) = g(f(x,x) :

h(x) = 1 ssi x ne contient pas x
h(x) = 0 ssi x contient x

On peut écrire h(x) = f(x, a) à condition de poser a comme l'ensemble des ensembles x tels que f(x, x) = 0 :

$$a = \{x \mid f(x, x) = 0\}$$

a est l'ensemble des ensembles qui ne se contiennent pas eux-mêmes.

Il en résulte, là encore que h(x) = g(f(x, x)) = f(x, a) et donc que h(a) = g(f(a, a)) = f(a, a) ;
f(a,a) est le point fixe de g qui n'en a pas. On en conclut que poser a comme on l'a fait est contradictoire.

Exportation

On peut constater sur ces exemples la grande généralité de la formulation de Girard. Celle-ci permet d'exporter l'argument diagonal de manière homogène à toute situation où l'on dispose d'un ensemble dans lequel on peut définir f(x, y) et g(x) de manière plausible.
Ainsi, dans l'ensemble des signifiants[2], définissons f(x, y) par :

f(x,y) = 1 ssi x représente un sujet pour y
f(x,y) = 0 en cas contraire

On peut se demander à juste titre quel peut bien être le sens de f(x, x) = 1 : x représente un sujet pour lui-même. Ne pourrait on pas voir là une reformulation de la question abordée cet été : qu'est-ce qu'un signifiant identique à lui-même ?
Toujours est-il qu'en poursuivant mécaniquement la démarche, on est amené à poser :

h(x) = g(f(x, x)) : h(x) est la fonction qui vaut 1 quand x ne représente pas un sujet pour lui-même.

Il suffit donc de poser :

$$a =\{x \mid f(x, x) = 0\}$$

a est l'ensemble des signifiants qui ne représentent pas un sujet pour eux-mêmes (les signifiants ordinaires, en somme …),

… pour aboutir, par la même démarche que ci-dessus, [h(x) = g(f(x, x)) = f(x, a)] à une contradiction, toujours la même : poser a entraîne que g(f(a, a) = f(a, a) : g, la négation, qui est construite pour n'avoir aucun point fixe, en possède néanmoins un.
On en conclut que poser a comme un ensemble conduit à une contradiction.
L'utilisation du formalisme de Girard a le mérite d'attirer notre attention sur le fait que cette contradiction, qui nous interdit de considérer la collection des signifiants « ordinaires » comme un ensemble, concerne au premier chef la négation booléenne g.

Un léger glissement permet d'interroger ce formalisme différemment. Posons maintenant :

---

[2]Pour autant qu'une telle entité ait un sens !

$f(x, y) = 1$ ssi x signifie y
$f(x, y) = 0$ en cas contraire

avec toujours $g(0) = 1$ et $g(1) = 0$.
Il faut remarquer que si nous pouvons nous sentir autorisés à poser cette définition : $f(x, y) = 1$ ssi x signifie y, cela repose entièrement sur le fait pointé par Lacan que la signification est quelque chose qui se passe à l'intérieur du système des signifiants. Il n'est pas question ici de dénotation, de référent, ou de toute autre allusion au fait qu'un signifiant renverrait à quelque chose. La différence entre signifiant et signe est ici cruciale : elle s'introduit comme d'abord comme une restriction

A présent, $f(x, x) = 1$ se lit : x signifie x. Si nous tenons compte de l' « axiome » : Aucun signifiant ne saurait se signifier lui-même, nous devons en déduire que $f(x, x)$ n'est jamais égale à 1. Ou encore que

$a = \{x \mid f(x, x) = 0\}$	désigne le « tout » des signifiants, et que
$\{x \mid f(x, x) = 1\}$	est l'ensemble vide

Ne pourrait-on pas voir là un des avatars du phallus symbolique : ce « signifiant des effets de signifiance dans leur ensemble » ? Le fait que le Phallus doit rester voilé serait alors illustré par le fait que a n'est en aucun cas un signifiant comme les autres : le simple fait de chercher à l'écrire conduit à une contradiction dont seul l'inconscient est capable de s'accommoder.

Mais ce n'est pas tout : le phallus, ici n'apparaît pas seulement comme cet a contradictoire, mais aussi comme ce qui engendre un point fixe pour g : $f(a, a)$, prise comme assertion, est à la fois vraie et fausse : elle est identique à sa négation (booléenne ! : cette négation-là est involutive : $g(g(x)) = x$). La question à explorer serait me semble-t-il, de voir si ce point-fixe-là a quelque chose à voir avec le point fixe du théorème de Brouwer. Ce dernier est en effet entièrement fondé sur l'usage de fonctions continues, or la signifiance, a priori, s'établit entre des éléments discrets.

Quel est le statut de la continuité de la fonction : x signifie y ?
Ce statut ne devrait-il pas être différent suivant qu'il s'agit de Wortvorstellungen, de Sachevorstellungen, ou de repräsantanz ?

⌘

Une autre remarque est que dans les applications de l'argument diagonal, on est souvent amené à repérer le point fixe de g à l'aide d'un raisonnement « qui tourne en rond » : si c'est vrai, c'est faux, si c'est faux c'est vrai, etc. La formulation du point fixe possède l'avantage de réduire cet effet de paradoxe à une pure contradiction : g, construite pour n'avoir pas de point fixe, en possède un si on admet telle ou telle hypothèse.

Il est curieux de remarquer qu'une formulation tout à fait analogue, résumant le dilemme de la « belle bouchère », n'est habituellement pas considérée comme paradoxale.

« Je désire que mon désir soit insatisfait » n'est nullement cité comme un paradoxe logique. Pourtant le raisonnement circulaire du menteur s'applique parfaitement : Si mon désir même de voir mon désir insatisfait reste insatisfait, alors, il sera satisfait, et donc etc. Là encore, contradiction s'enroulant autour du point fixe de la non-satisfaction.

Au point que l'on pourrait, en forçant le trait, formuler que la vérité est au dire ce que la satisfaction est au désir.
Et n'est-ce pas là une façon d'énoncer l'objet de la recherche de Freud, notamment dans *Le mot d'Esprit* : articuler vérité et satisfaction ?