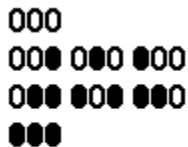


La solution du problème des 3 prisonniers formalisée par la théorie des jeux.

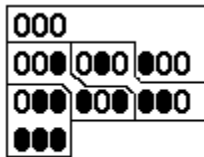
Le formalisme d'Aumann considère l'ensemble Ω des mondes possibles comme donné. Chaque joueur (A, B, ou C) a de cet ensemble une connaissance partielle, représentée par une partition (un découpage en sous-ensembles) Ω , appelée *partition d'information* du joueur. Le joueur ne connaît pas l'état réel ω_0 du monde, mais seulement le sous-ensemble de sa partition où se trouve ω_0 . Ainsi, dans le problème des 3 prisonniers, l'ensemble des états possibles du monde est donné par la figure ci-dessous :



où la convention est que : $\circ\bullet\bullet$ signifie que :

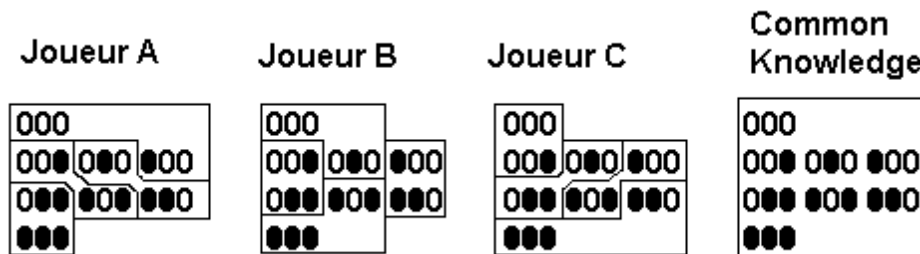
- le joueur A porte un rond blanc,
- le joueur B porte un rond noir,
- le joueur C porte un rond noir.

Comme le joueur A ne peut distinguer, par exemple, entre $\circ\circ\circ$, et $\bullet\circ\circ$, ou entre tout couple d'états qui ne diffèrent que par le premier rond, la partition d'information de A, au début du jeu est :



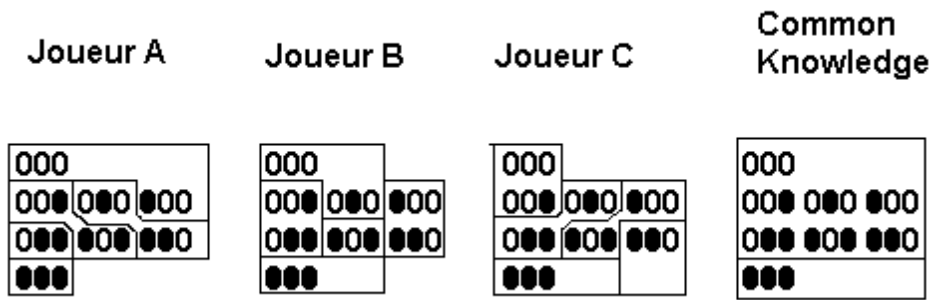
Le *common knowledge* est le savoir commun aux trois joueurs. Il est constitué par la partition de Ω qui ne comporte que les parties communes aux partitions d'information des trois joueurs. Au début du jeu, le *common knowledge* est Ω , ce qui signifie que rien n'est connu de la zone de Ω où se trouve l'état réel du monde (ici $\omega_0 = \circ\circ\circ$).

Au début du jeu, la configuration des partitions d'information et du *common knowledge* est donc la suivante :



Le jeu commence avec une déclaration publique du meneur, qui annonce : « L'un au moins d'entre vous porte un rond blanc. »

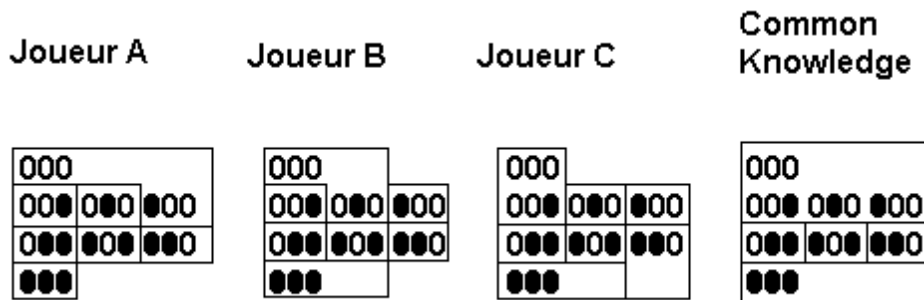
Cela n'apprend apparemment rien à personne sur l'état du monde, puisque chacun a sous les yeux deux ronds blancs. Mais cela rend impossible la configuration $\bullet\bullet\bullet$, et du coup, cela modifie les partitions d'informations et le *common knowledge*. En effet, maintenant, tout le monde sait qu'à voir deux noir, on sait qu'on est un blanc. La configuration est maintenant la suivante :



Au bout du temps imparti, les trois joueurs déclarent « Je ne sais pas ». Et c'est vrai : bien que leur connaissance du monde ait augmenté par la déclaration du meneur, le sous ensemble où se trouve l'état réel ω_0 du monde comporte toujours 2 éléments.

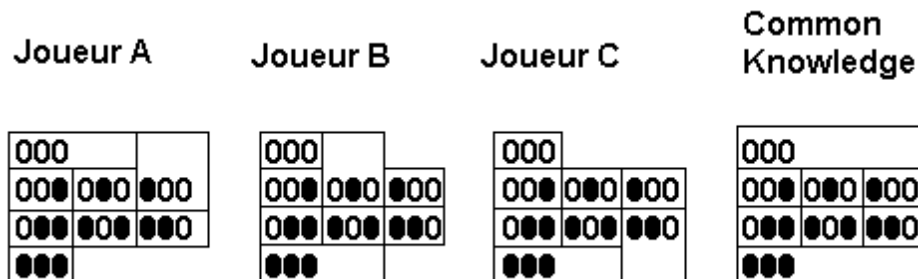
Après cette déclaration, cependant, les trois joueurs ont appris quelque chose, qui a été versé au *common knowledge* : les configurations $\bullet\bullet\circ$, $\bullet\circ\bullet$, et $\circ\bullet\bullet$, sont désormais impossibles. Là encore, ce fait était connu de chacun, puisque chacun a sous les yeux deux blancs. L'information nouvelle ne concerne donc pas l'état du monde, mais ce qui, de cet état, fait partie du *common knowledge*, et pas seulement du savoir privé de chacun. Comme le dit Lasry, « cela a été dit entre eux ».

La nouvelle configuration est donc :



Là encore, aucun joueur n'en sait plus concernant l'état du monde. Il n'en sait plus que sur ce que désormais tout le monde sait.

Au bout d'une heure, à nouveau chacun déclare donc « je ne sais pas ». La nouvelle configuration est alors :



et à cet instant, chacun sait ce qu'il en est de son propre rond, le *common knowledge* ayant désormais totalement quadrillé Ω .