

Etudes Borroméennes

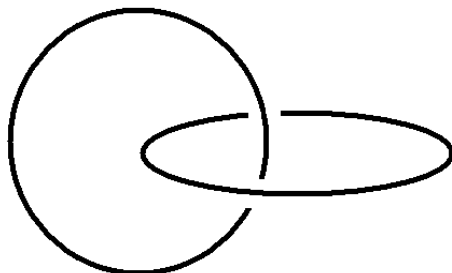
Noeuds borroméens, cycles et entrelacs de Hopf

Le but de cette étude est de montrer qu'un noeud borroméen à 3 ou à 4 anneaux peut toujours être considéré comme un entrelac de Hopf, dont un ou deux anneaux ont été remplacés par ce que Lacan appelle «un cycle», c'est à dire un faux anneau formé de deux anneaux non enlacés, mais entourant un «faux trou».

C'est un exercice sur les différentes manières d'écrire les noeud borroméens à 3 ou à 4 anneaux

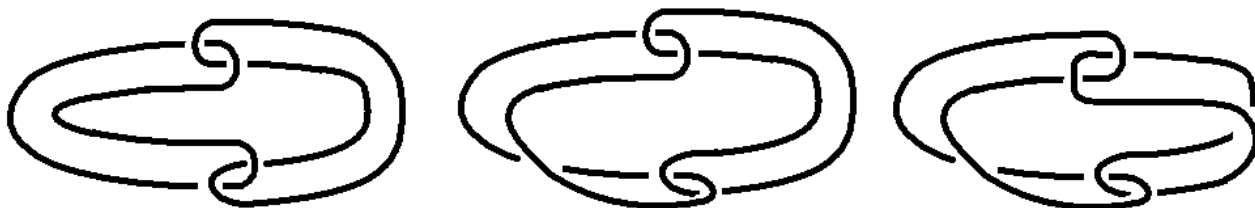
Le noeud à trois anneaux :

Voici un entrelac de Hopf :

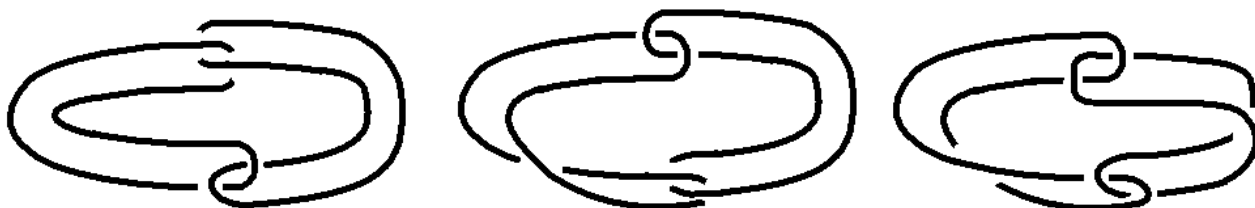


C'est l'entrelac le plus simple après la suite des entrelacs triviaux (à 1, 2, ...,n anneaux non liés)

Voici un cycle mis à plat de plusieurs manières

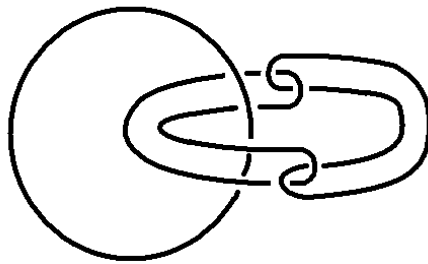


Attention, se méfier des contrefaçons, voir RSI leçon 7 du 11 mars 1975 et annexe 4. Les figures ci-dessous ne sont PAS des cycles, car les 2 anneaux ne peuvent y être séparés :

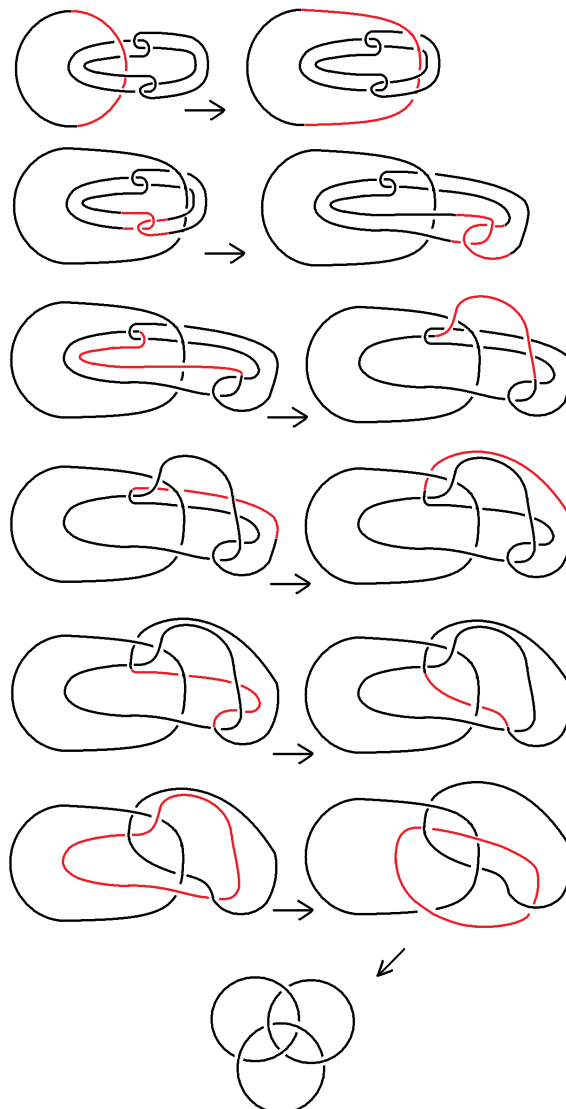


Le cycle n'a aucune cohérence par lui même. Ce n'est ni un noeud ni un entrelac. Juste une manière un peu compliquée de représenter deux noeuds triviaux que rien n'attache entre eux. Le cycle ne prend son intérêt que lorsqu'il est «stabilisé» par autre chose. Par exemple par un anneau simple, ce qui donne :

un entrelac de Hopf dont l'un des anneaux a été remplacé par un cycle :

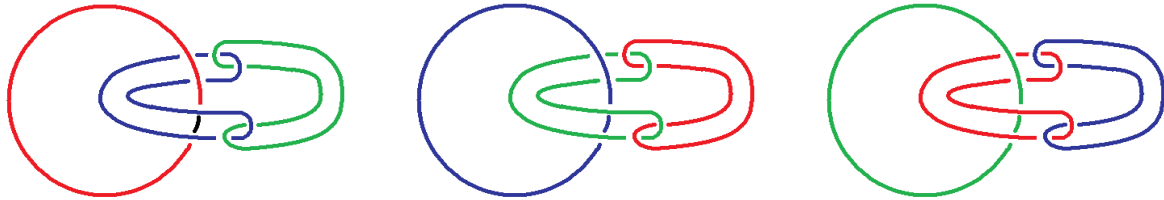


La suite de figures ci-dessous montre que l'entrelac ci-dessus n'est autre qu'un noeud borroméen. A chaque étape, on a représenté en rouge la partie déplacée :



Il serait évidemment possible de détailler la succession de mouvements de Reidmeister correspondant à la suite de figures donnée ci-dessus. On obtiendrait (sauf erreur) :

Il résulte de cela que réciproquement, un noeud borroméen à trois anneaux peut toujours être considéré comme un entrelac de Hopf, dans lequel l'un des registre vient «stabiliser» les deux autres en traversant le «faux trou» qu'ils forment comme cycle. D'où trois écritures qui sont données ci-dessous¹ :

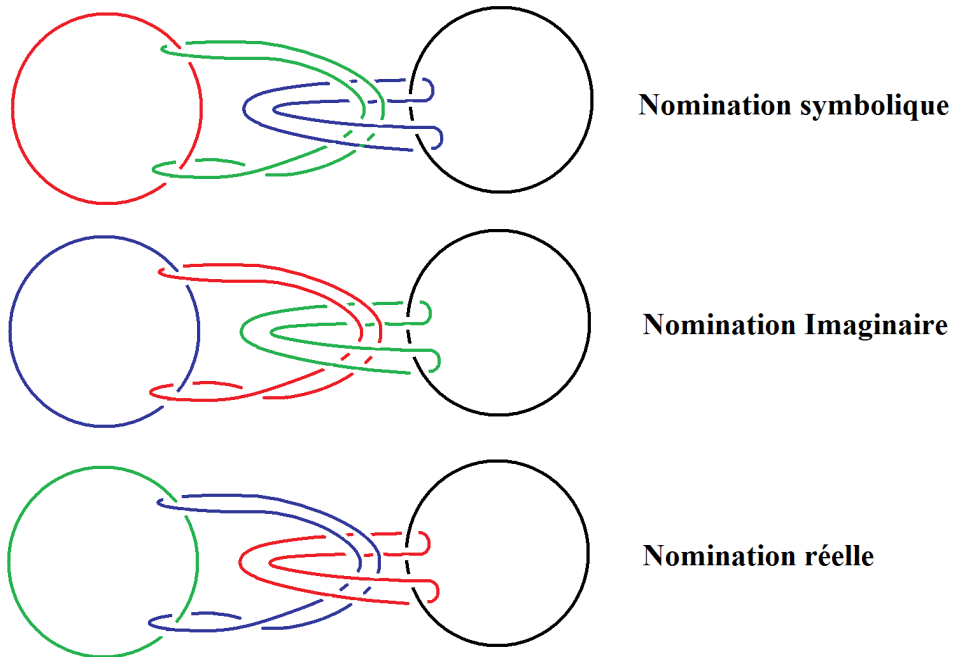


Il est possible de passer de l'une à l'autre de ces configurations sans ouvrir l'un des registres, en raison du fait qu'il n'y a qu'un noeud borroméen coloré.

Le noeud à 4 anneaux

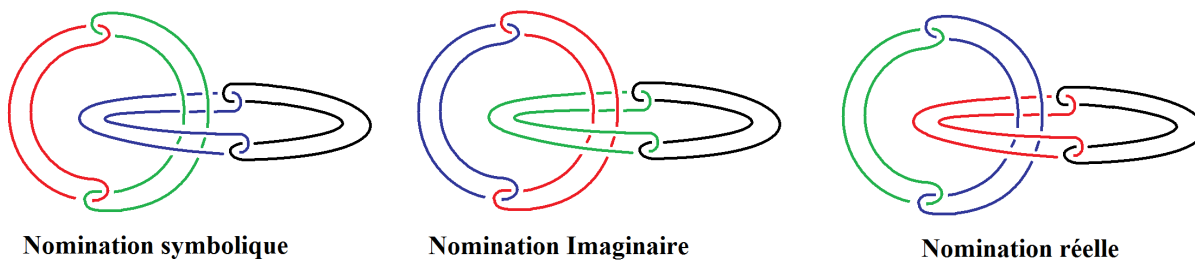
En appliquant le même principe au noeud borroméen à 4 ronds, on constate que celui-ci peut, au choix, être considéré comme :

1. Deux ronds extrêmes reliés par deux ronds pliés qui font «moyen» entre les deux premiers :

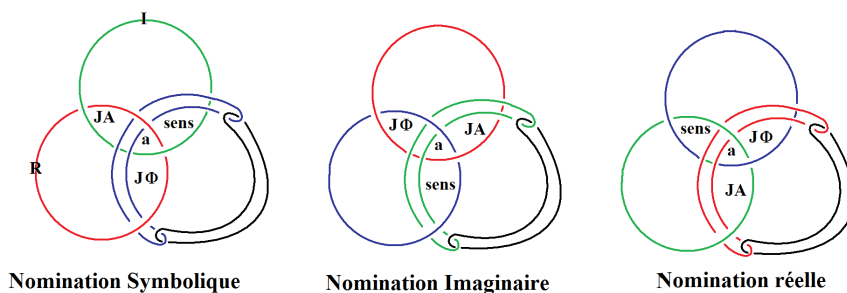


¹ Nous adoptons toujours la même convention : Rouge = Réel, Bleu = Symbolique, Vert = Imaginaire, Noir = 4e rond : Nomination, Sinthome, Nom du père, Oedipe ...)

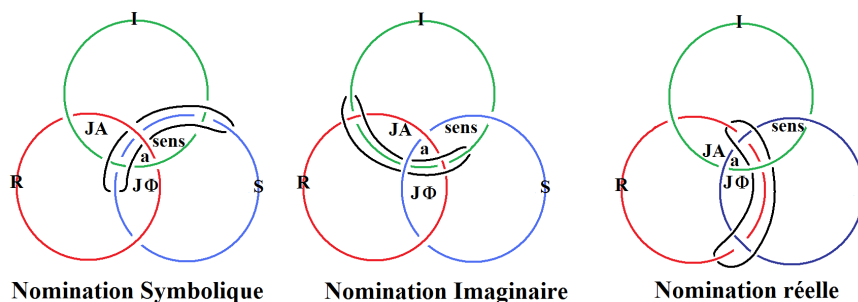
2. Un entrelac de Hopf où les deux anneaux ont été remplacés par des cycles :



3. Un noeud borroméen dans sa mise à plat habituelle, mais où l'un des anneaux a été remplacé par un cycle :



4. Un empilement de trois ronds, «corrigé» par un quatrième :



Cependant, à la différence du noeud à 3, il n'est pas possible de passer d'une configuration² à l'autre sans ouvrir l'un des ronds. Il s'agit à chaque fois de 3 noeuds différents. C'est l'objet d'une partie de la leçon XI du séminaire RSI, repris à la leçon II du Sinthome.

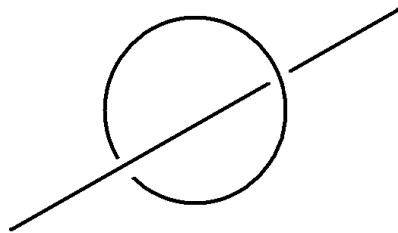
Pour un noeud donné (NR, NS, NI), on peut passer d'une représentation à l'autre par une suite de mouvements de Reidemeister qu'il serait fastidieux de détailler.

² Nous appelons ici «configuration» ce qui est désigné sur les figures par «Nomination Réelle» (NR), «Nomination Symbolique» (NS) et «Nomination Imaginaire» (NI)

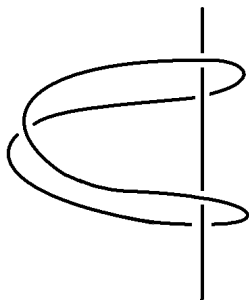
Avec la droite infinie

Lorsqu'on fait intervenir la droite infinie, les configurations ci-dessus se transforment.

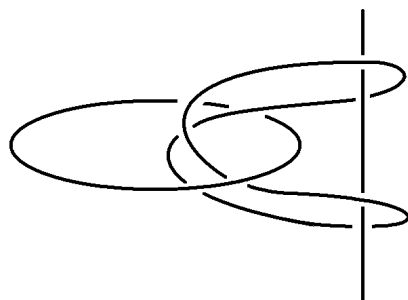
Un entrelac de Hopf devient :



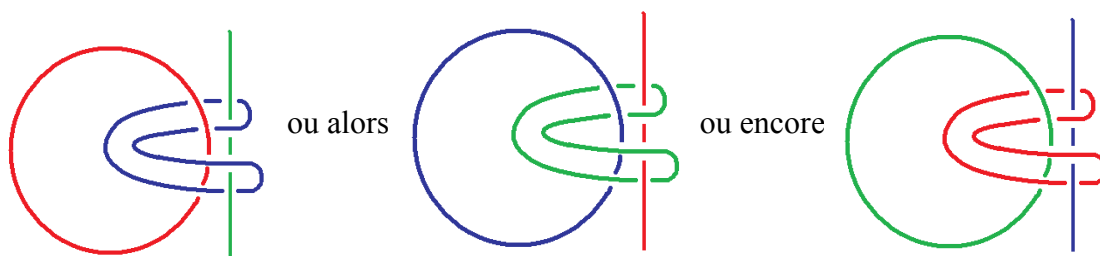
Un cycle devient :



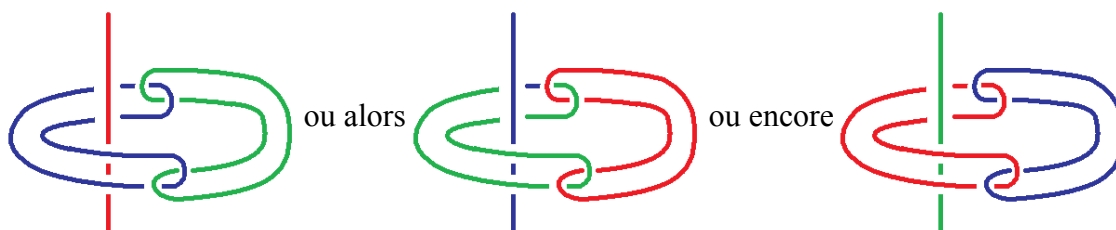
Un entrelac de Hopf dont un anneau a été remplacé par un cycle donne :



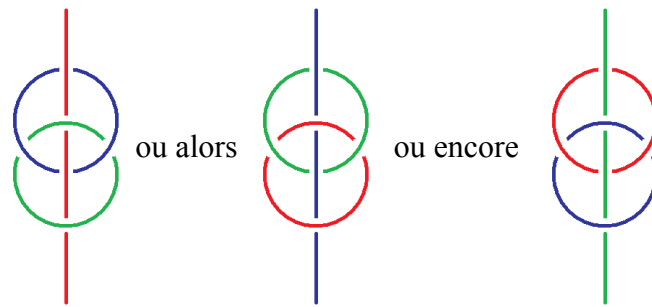
On a donc trois formes de noeud borroméen coloré :



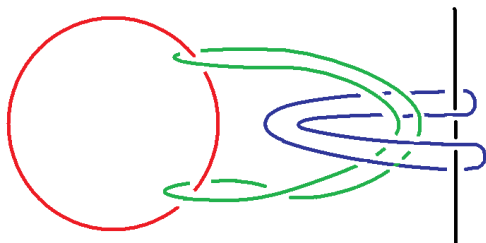
mais aussi :



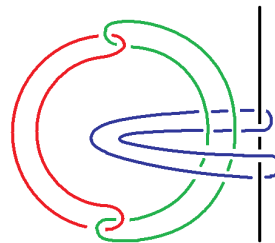
Ou enfin :



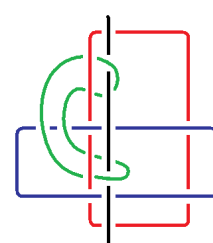
Pour le noeud à 4, le nombre de façon différentes d'introduire la droite infinie est nettement plus élevé. Nous nous contenter d'en donner ci-dessous quelques exemples :



Nomination symbolique



Nomination symbolique



RSI leçon XI