

Présentation du noeud borroméen

1. Le noeud borroméen monochrome, la gyrie

Le noeud borroméen est l'une des solutions (Lacan souligne à plusieurs reprises que ce n'est pas la seule) du problème borroméen qui s'énonce : comment nouer entre eux trois anneaux de telle façon que lorsqu'on sectionne l'un quelconque d'entre eux, on dénoue l'ensemble des 3 anneaux.

La façon la plus simple de dessiner un noeud borroméen est donnée figure 1:

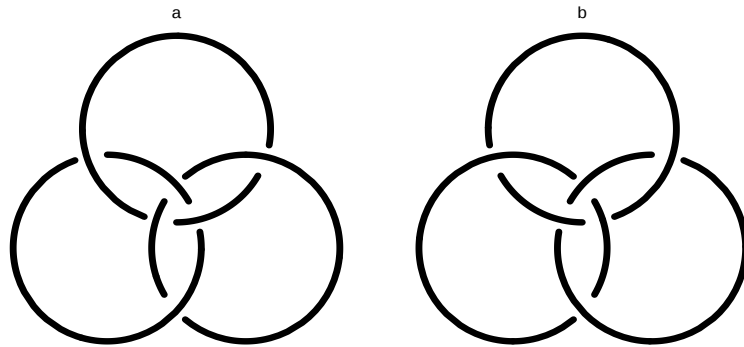


Figure 1 : Noeuds borroméens levogyre et dextrogyres. (nfig0.eps)

Sur cette figure, on n'a pas distingué les anneaux entre eux. On peut constater, en réalisant matériellement le noeud, qu'aucun des 3 anneaux n'a de position privilégiée qui permettrait de le distinguer des autres. les 3 anneaux sont équivalents, et pour les reconnaître, il faudrait leur donner un signe distinctif, par exemple les colorer.

En revanche, la figure 1a n'est pas la seule représentation possible du noeud borroméen. La figure 1b est une autre possibilité, différente de la première, en ceci qu'il n'est pas possible de la superposer à la première par simple glissement dans le plan de la figure.

Il y a donc deux formes de noeud borroméen, que Lacan désigne par noeud *levogyre* et noeud *dextrogyre*. On voit clairement sur la figure 1 que les deux formes du noeud sont l'image dans un miroir l'une de l'autre. Pour reconnaître si un noeud est dextrogyre ou levogyre, il suffit de considérer sa partie centrale, constituée par trois brins courbes (figure 2) Si ces trois brins dessinent une rotation dans le sens des aiguilles d'une montre, on dira que le noeud est dextrogyre. Sinon, on dira qu'il est levogyre. Sur la figure 1 le noeud 1a est levogyre.

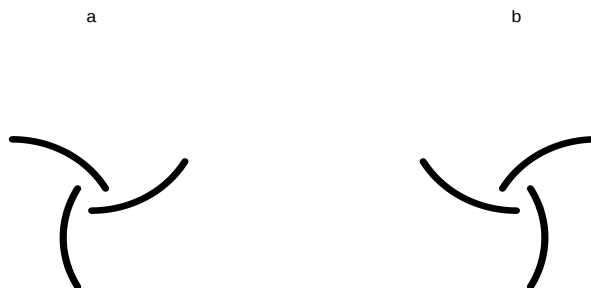


Figure 2 : Partie centrale des noeuds borroméens levogyre (a) et dextrogyre (b). (nfig01.eps)

Un autre façon d'établir la distinction entre les deux formes levogyre et dextrogyre du noeud consiste à prendre en compte la superposition des anneaux : Dans le noeud de la figure 1a, l'anneau en bas à gauche est entièrement au-dessus de l'anneau en bas à droite, qui est lui-même entièrement au-dessus de l'anneau du haut, qui est lui-même Si l'on suit

l'ordre des superpositions, on tourne dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. On dit alors qu'on a affaire à un noeud levogyre. Dans le noeud de la figure 1b, l'anneau en bas à droite est entièrement au dessus de l'anneau en bas à gauche, qui Si l'on suit l'ordre des superpositions, on tourne cette fois dans le sens des aiguilles d'une montre. On dit alors que le noeud est dextrogyre.

Nous appellerons, comme Soury, *gyrie* d'un noeud borroméen le fait d'être dextrogyre ou levogyre. Il faut souligner que la gyrie d'un noeud borroméen ne dépend absolument pas du fait qu'on ait distingué ou non les anneaux les uns des autres. C'est bien une caractéristique du noeud monochrome.

2. Le noeud borroméen polychrome, l'ordre.

Lorsqu'on décide de distinguer les 3 anneaux entre eux, en leur donnant une couleur, rouge (R), verte (V) ou bleue (B)(mais cela peut aussi être un nom, une étiquette, comme R,S,I, par exemple) le nombre de possibilités *distinctes* de représenter le noeud s'accroît. Dans la suite, nous dirons que deux représentations du noeud sont distinctes lorsqu'il est impossible de passer de l'une à l'autre par un simple glissement dans le plan de la feuille de papier. La figure 3 donne un exemple de deux représentations identiques du noeud. La figure 4 donne un exemple de deux représentations distinctes.

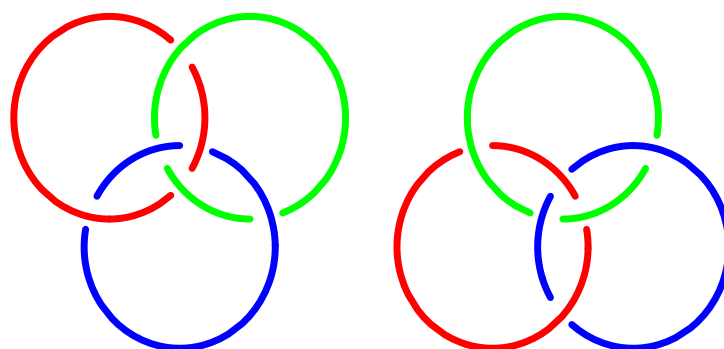


Figure 3 : Exemple de deux représentations du noeud à considérer comme identiques : On passe de l'une à l'autre par simple rotation. (nfig4.eps)

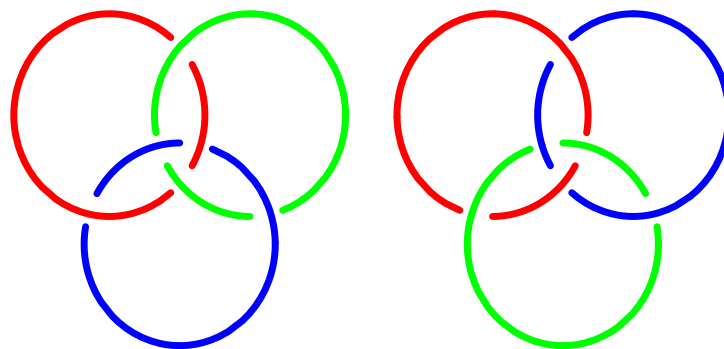


Figure 4 : Exemple de deux représentations du noeud à considérer comme distinctes. (nfig02.eps)

Le fait de colorer les anneaux fait que pour chaque représentation monochrome du noeud, il existe deux façons distinctes d'ordonner les couleurs, en suivant l'ordre de superposition :

- L'anneau rouge peut être au-dessus du Vert, lui-même au-dessus du Bleu (RVB), ou alors
- l'anneau Rouge peut être au-dessus du Bleu, lui-même au dessus du Vert (RBV).

Cet ordre est indépendant de la gyrie du noeud. Nous appellerons *ordre* d'un noeud borroméen dans le plan le fait que pour ce noeud les ronds se succèdent suivant l'une des deux possibilités ci-dessus. L'ordre peut être RVB ou RBV. (Il est clair que RVB, VBR, et BRV sont équivalents, de même que RBV, BVR, et VRB. Il n'y a donc que deux ordres possibles).

Il en résulte qu'il n'existe que 4 représentations distinctes du noeud borroméen coloré dans le plan : RVB-L, RVB-D, RBV-L et RBV-D. Ces 4 représentations sont données figure 5

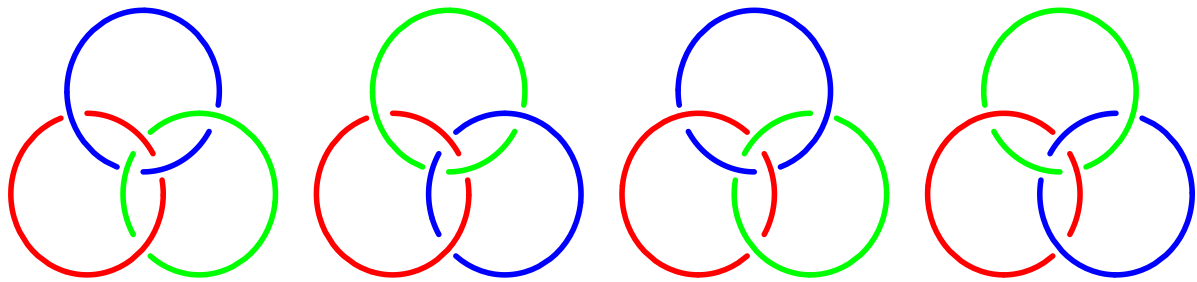


Figure 5 : Les 4 formes distinctes du noeud borroméen plan coloré. De gauche à droite, on a : RVB-L, RBV-L, RBV-D, RVB-D. (nfig7.eps)

3. Le noeud borroméen dans l'espace, les mises à plat

Le noeud borroméen peut également s'aborder à travers la figure tridimensionnelle donnée figure 6.

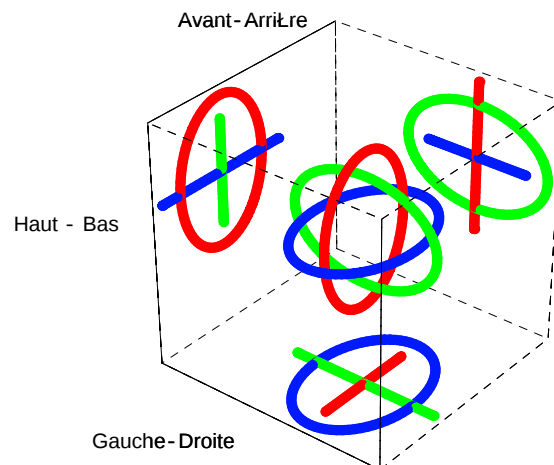


Figure 6 : Noeud borroméen dans l'espace. Les ombres projetées sur les 3 faces du cube montrent que les trois anneaux sont ovales. (nfig1.eps)

Dans cette figure, on peut remarquer qu'il existe un ordre de succession, qui n'est pas identique à l'ordre défini plus haut : ici, le rond rouge entoure l'anneau vert, qui lui-même entoure l'anneau bleu, qui lui-même ... Il est donc clair qu'il existe une deuxième représentation du noeud borroméen où l'anneau rouge entoure l'anneau bleu, qui lui-même entoure l'anneau vert, qui lui-même ... Cette deuxième représentation est donnée figure 7.

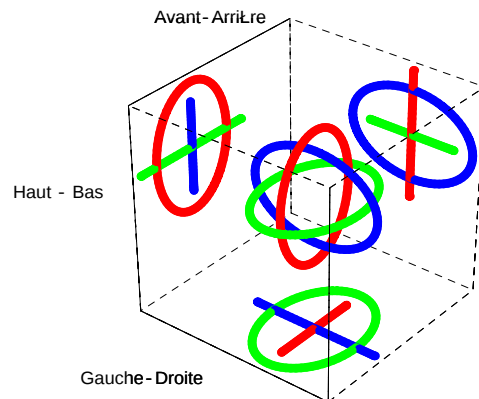


Figure 7 : Noeud borroméen dans l'espace. L'ordre des couleurs est différent de celui de la figure 6. (nfig6.eps)

Un noeud borroméen dans l'espace peut être mis à plat suivant différents points de vue. Nous donnons ci-après, un exemple de mise à plat : la mise à plat du noeud de la figure 6 suivant la direction Haut, Avant, Droite. La mise à plat se déroule en deux temps :

D'abord, on repousse les anneaux en les laissant parallèles à eux mêmes (par exemple, sur la figure 8, on a repoussé l'anneau rouge vers la gauche, l'anneau bleu vers le bas, et l'anneau vert vers l'arrière), puis on les tourne de manière à les amener dans un même plan (figure 9).

On constate qu'on obtient un noeud du type RBV-L. Il faut cependant remarquer que ce résultat est dû à la convention que nous adoptons pour la procédure de mise à plat. Le lecteur qui se familiarisera avec la manipulation effective du noeud pourra se convaincre que cette convention n'est pas unique.

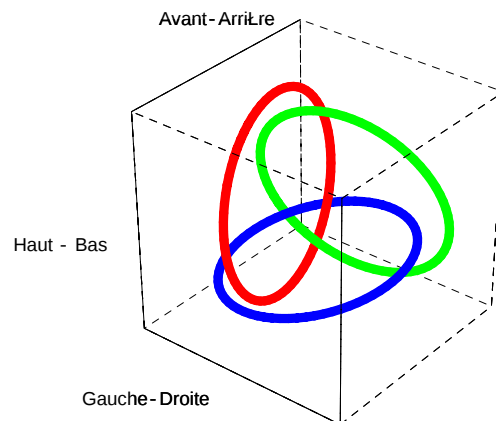


Figure 8 : Noeud borroméen dans l'espace. Les anneaux ont été repoussés, pour préparer la mise à plat selon le point de vue : "En haut, en avant, à droite (H Av D).(nfig2.eps)

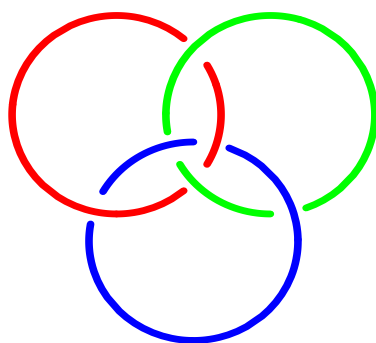


Figure 9 : Noeud borroméen de la figure 6 mis à plat selon le point de vue (H Av D). On constate qu'on obtient un noeud de type RBV-L. (nfig3.eps)

La même opération de mise à plat peut se réaliser suivant les 8 points de vue : (H Av D), (H Av G), (H Ar D), (H Ar G), (B Av D), (B Av G), (B Ar D), (B Ar G). Le résultat d'une mise à plat ne pourra cependant que donner l'une des 4 configurations distinctes possibles, données figure 5

En fait, on constate que les 8 mises à plat correspondant aux 8 points de vue possibles du noeud de la figure 6 fournissent finalement que deux des 4 mises à plat distinctes données figure 5.

Ainsi, sur la figure 10 nous montrons l'amorce de la mise à plat du noeud de la figure 6, selon le point de vue "En haut à droite et en arrière" On voit qu'on obtient un noeud plan du type RBV-D.

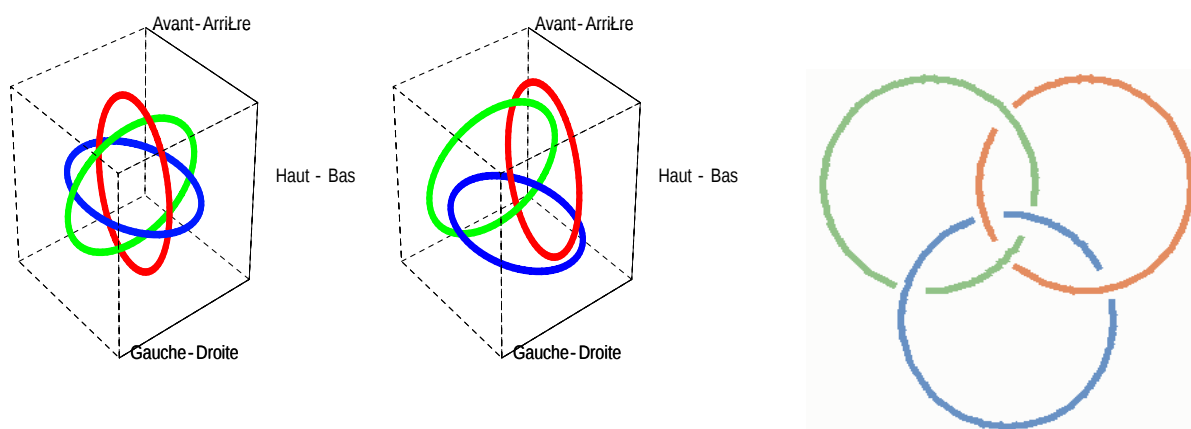


Figure 10 : Mise à plat du noeud borroméen de la figure 6 selon le point de vue (En haut, à droite, en arrière). On constate qu'on obtient un noeud de type RBV-D. (HarD.eps et misapla.bmp)

La figure 11 montre comment on peut faire pivoter le noeud de la figure 6 autour d'un axe horizontal pour atteindre le point de vue : "en bas, à droite en avant". La figure 12 permet alors de constater que la mise à plat selon ce point de vue sera encore un noeud plan du type RBV-D.

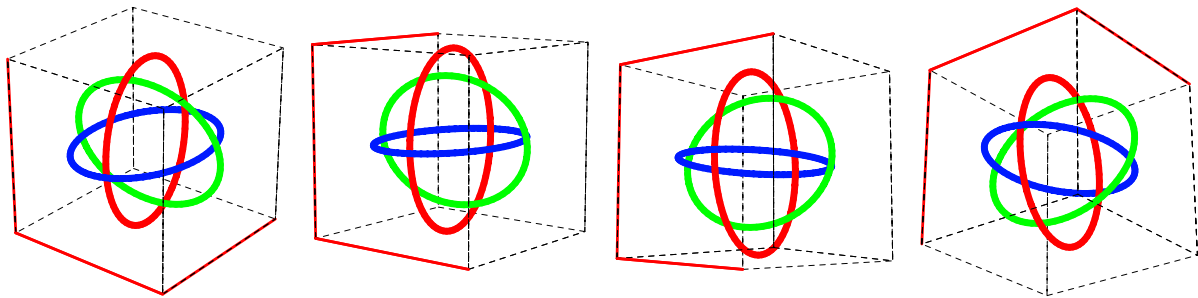


Figure 11 : Passage progressif du point de vue "en haut à droite en avant" au point de vue "en bas à droite en avant" (rot.eps)

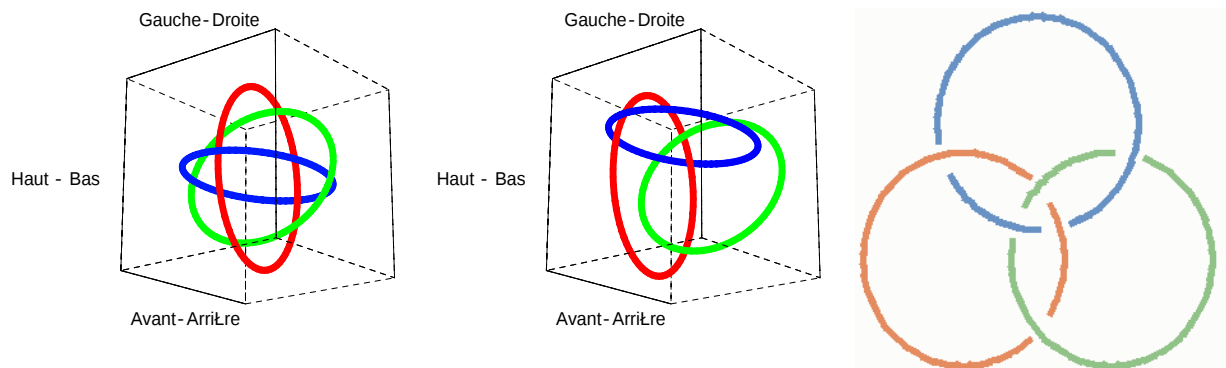


Figure 12 : Mise à plat du noeud borroméen de la figure 6 selon le point de vue "en bas, à droite, en avant". On constate qu'on obtient un noeud de type RBV-D. (BavD.eps et misapla0.bmp)

On pourrait continuer cette illustration en passant en revue les 8 points de vue possibles. Nous avons cependant déjà les éléments pour arriver à la conclusion suivante : les mises à plat du noeud de la figure 6 sont toutes du type RBV, et alternativement lévogyres ou dextrogyres sur les 8 sommets du cube qui donnent les 8 points de vue possibles. Pour avoir les deux autres mises à plat possibles (celles dont l'ordre est RVB, lévogyre ou dextrogyre), il faut partir de la figure 7.

La question se pose donc de savoir si les deux 6 et 7 sont deux représentations différentes du même noeud borroméen, ou s'il y a effectivement deux noeuds différents. Pour cela il s'agit de savoir si l'on peut passer de la figure 6 à la figure 7 sans couper aucun des anneaux, ou au contraire s'il est nécessaire de couper un anneau pour transformer l'un en l'autre les noeuds des figures 6 et 7. Pour cela, nous allons étudier les diverses façons de passer d'une mise à plat à l'autre.

4. Les transformations du noeud borroméen : d'une mise à plat à l'autre.

Les 4 mises à plat distinctes possibles pour un noeud dont les anneaux sont distingués (par leur couleur ou par tout autre moyen) sont données figure 5, et nous avons choisi de les désigner par les 4 étiquettes : RVB-L, RVB-D, RBV-L, RBV-D.

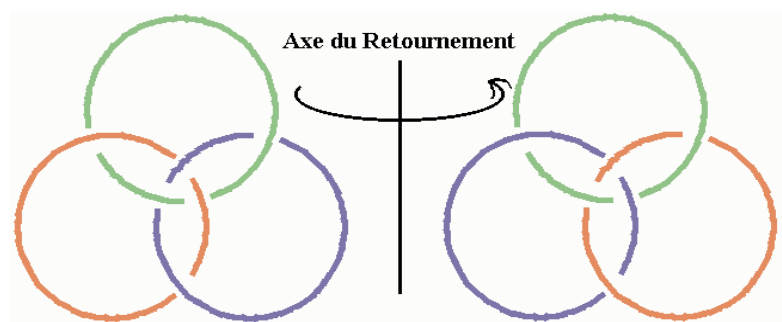


Figure 13 : Une mise à plat de type RVB-D et sa retournée : la gyrie est conservée l'ordre est inversé. On obtient une mise à plat du type RBV-D .(crepe.bmp)

La figure 13 montre ce que devient le noeud mis à plat sous la forme RVB-L lorsqu'on le retourne en bloc, "comme une crêpe". On constate qu'il devient RBV-L: La gyrie est conservée, alors que l'ordre est inversé. Cette loi est générale: lorsqu'on retourne un noeud en bloc, "comme une crêpe", on effectue une transformation de la mise à plat de départ en une mise à plat de même gyrie et d'ordre opposé.

Il faut noter que cette transformation est très différente de la symétrie par rapport à une droite (un miroir perpendiculaire au plan de la figure). Cette dernière transformation, représentée figure 14, montre que la symétrie conserve l'ordre et inverse la gyrie. Le retournement en bloc et la symétrie sont des transformations qui donnent le même résultat lorsqu'elles sont appliquées à une figure bidimensionnelle, comme un triangle ou un cercle. Le fait qu'on obtienne des résultats différents avec le noeud borroméen peut être considéré comme une "preuve" du fait que celui-ci est une figure authentiquement tridimensionnelle. C'est peut-être aussi l'origine du fait que Lacan qualifie la mise à plat du noeud "d'écriture réelle".

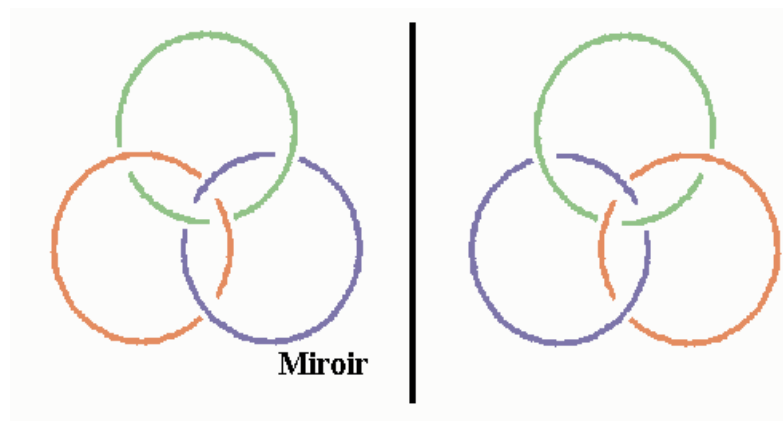


Figure 14 : Une mise à plat de type RVB-D et son image dans un miroir perpendiculaire au plan de la figure : l'ordre est conservé, la gyrie est inversée. On obtient RVB-L. (symetr.bmp)

Notons également que la symétrie n'est pas une transformation "physique" : nous ne savons pas a priori si, pour transformer un noeud donné en son symétrique, nous devons couper un anneau ou non.

La figure 15 montre que ce n'est pas nécessaire: elle montre ce qu'on obtient lorsqu'on retourne l'un des anneaux autour des deux autres: on obtient, comme pour la symétrie, un noeud de gyrie inversée et de même ordre que le noeud de départ. Le retournement d'un anneau est donc une transformation physique équivalente à la symétrie.

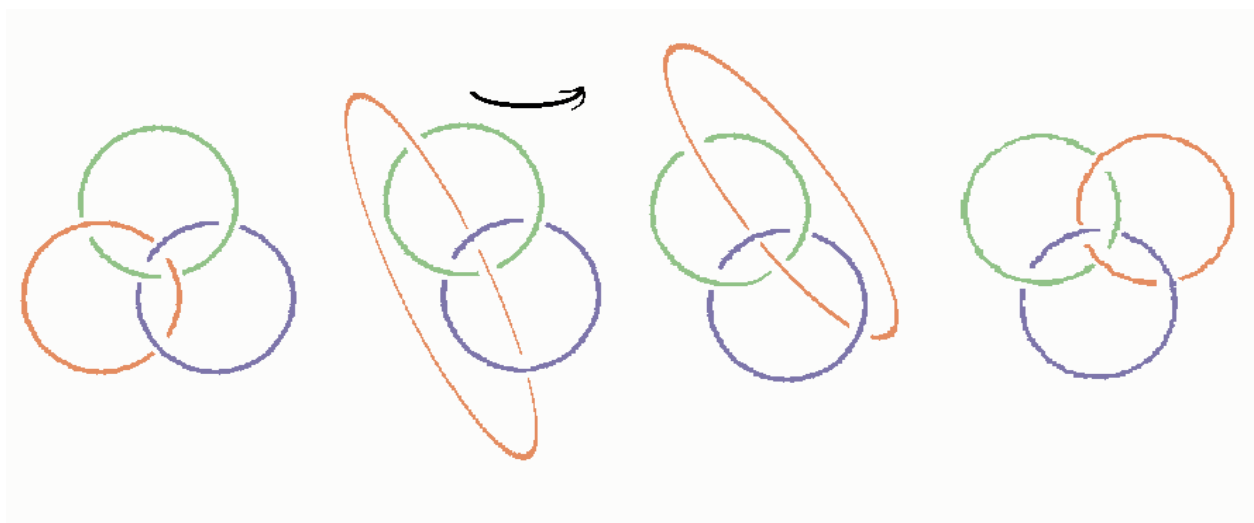


Figure 15 : L'effet d'un retournement d'anneau. L'ordre est conservé, la gyrie est inversée, comme pour la symétrie.
(retourne.bmp)

Concernant cette opération de retournement d'anneau, on peut remarquer qu'elle donne le même résultat quel que soit l'anneau que l'on retourne. D'autre part c'est ce même résultat que nous obtenons lorsque nous procédons à la mise à plat d'un noeud dans l'espace (figure 6 ou 7) suivant deux points de vue voisins sur le cube des 8 points de vue possibles : on change la gyrie en conservant l'ordre.

Ainsi, nous pouvons, à l'aide de nos deux transformations, retournement global et retournement d'un anneau, passer indépendamment d'un noeud d'ordre RVB à un noeud d'ordre RBV et vice-versa d'une part, et d'un noeud lévogyre à un noeud dextrogyre et vice-versa, d'autre part. Il est donc clair que ces deux transformations sont suffisantes pour transformer n'importe laquelle des 4 configurations possibles de la figure 5 en n'importe quelle autre.

Il en résulte également que les deux noeuds dans l'espace, donnés figure 6 et figure 7 peuvent être transformés l'un en l'autre en passant par l'intermédiaire d'une mise à plat quelconque, suivie d'un retournement en bloc (comme indiqué figure 13), suivie de l'opération inverse d'une mise à plat. Le passage de la figure 5 à la figure 6 lorsqu'il est effectué sur un noeud fait à l'aide d'anneaux semi-rigides (fil électrique par exemple) apparaît comme une sorte de retournement où l'intérieur passerait à l'extérieur et vice-versa. Cela me semble expliquer l'intérêt que Lacan portait aux recherches sur le retournement de la sphère.

La conclusion de cette partie s'énonce, en résumé :

Il n'y a qu'un seul noeud borroméen coloré, et celui-ci ne peut être mis à plat que de 4 façons distinctes.